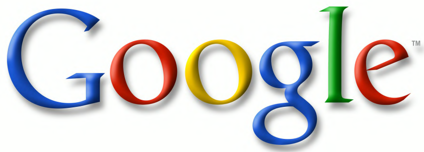




COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS
DE VARIABLES RÉELLES
ET LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE POLYNOMES,

PROFESSÉES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PAR

ÉMILE BOREL,

ET RÉDIGÉES PAR MAURICE FRÉCHET,

AVEC DES NOTES

Par Paul PAINLEVÉ et Henri LEBESGUE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

LEÇONS SUR LES FONCTIONS

DE VARIABLES RÉELLES

ET LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE POLYNOMES.

plus préoccupé d'encourager les initiatives qu'il juge bonnes que de faire strictement observer la lettre des règlements. Au nom de M. Jules Tannery je tiens à associer ceux de tous les autres mathématiciens à côté desquels j'ai eu l'honneur et le plaisir d'enseigner à l'École : M. Goursat, M. Painlevé et M. Hadamard. Car c'est seulement grâce à la collaboration amicale de collègues uniquement guidés dans leurs rapports mutuels par le désir de tout organiser au mieux des intérêts des élèves et de la Science qu'il a pu être possible de trouver la place de ce nouvel enseignement. C'est pour moi un agréable devoir de rendre publiquement ce témoignage.

Saint-Paul-des-Fonts (Aveyron), 15 août 1904.

INDEX.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS

DE VARIABLES RÉELLES

ET LEUR REPRÉSENTATION

PAR DES SÉRIES DE POLYNOMES.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES ENSEMBLES.

Puissance d'un ensemble. — L'idée d'ensemble est une notion primitive dont nous ne donnerons pas de définition ([1]). Citons seulement quelques exemples d'ensembles : l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des polynomes en x, l'ensemble des surfaces minima, etc.

On peut raisonner sur les ensembles sans s'occuper de la nature des objets qu'ils contiennent. Lorsqu'un ensemble est fini, on est ainsi amené à distinguer, parmi les propriétés *abstraites* de cet ensemble, le *nombre* des objets qu'il contient. Deux ensembles finis contiennent chacun le même nombre d'objets si, à tout élément de l'un, on peut faire correspondre un élément de l'autre et réciproquement. *S'il en est encore ainsi pour deux ensembles* QUELCONQUES E, E_1, *nous dirons avec M. Cantor que* E *a même* PUISSANCE *que* E_1. Nous pouvons maintenant nous proposer de comparer, au point de vue de la puissance, un ensemble quelconque à quelques ensembles qui nous sont familiers et que nous prendrons pour types.

([1]) *Voir*, pour la discussion de l'idée d'ensemble, ÉMILE BOREL, *Leçons sur la théorie des Fonctions*, Chapitre I et Notes. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ainsi, un ensemble E qui a même puissance que l'ensemble des nombres entiers : 1, 2, 3, ..., n, ..., est un ensemble *dénombrable*. Si E a même puissance que l'ensemble des nombres compris entre 0 et 1 (limites comprises), on dira que E a la *puissance du continu*.

Donnons des exemples de l'un et de l'autre cas. *Un ensemble de nombres* : $u_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ qui se distinguent par la suite de leurs k indices *entiers* $m_1, \ldots, m_k$ *est un ensemble dénombrable*. Il suffit, pour le voir, de montrer que l'on peut ranger ces nombres dans l'ordre 1, 2, ..., n, ..., de façon à les obtenir tous, chacun une seule fois. Pour cela, considérons tous ceux de ces nombres dont la somme des indices est égale à n. Il y en a un nombre fini, on peut donc les numéroter. Si l'on opère ainsi pour $n = 1$, $n = 2$, ..., on pourra les numéroter tous à partir de 1.

Ainsi *les nombres rationnels* $\frac{p}{q}$ *forment un ensemble dénombrable*, car $u_{p,q} = \frac{p}{q}$ est bien déterminé par les indices entiers p et q [1].

De même, on peut démontrer [2] que *l'ensemble des points compris dans un carré de côté égal à* 1 *a même puissance que l'ensemble des points situés sur un de ses côtés,* c'est-à-dire, a la puissance du continu. Une question se présente naturellement au sujet des deux ensembles que nous avons pris pour types : *l'ensemble* E *des nombres compris entre* 0 *et* 1 *est-il dénombrable? La réponse est négative* [3] : lorsqu'on enlève de l'ensemble E une infinité dénombrable d'éléments, il en restera toujours une infinité, de quelque manière qu'on opère [4].

---

(1) Suivant les cas, on est amené à regarder comme distinctes deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ du moment que p' et q' ne sont pas égaux respectivement à p et q, ou à ne pas regarder comme distinctes deux fractions *égales*, c'est-à-dire telles que $pq' - qp' = 0$, mais, quelle que soit la convention faite, la conclusion est la même.

(2) *Voir* E. Borel, *loc. cit.*, p. 17.

(3) *Voir* E. Borel, *loc. cit.*, p. 14.

(4) D'ailleurs il ne faudrait pas croire que les deux types de puissances que nous avons considérés soient les seuls possibles. *Voir,* à ce sujet, E. Borel, *loc. cit.*, p. 107.

Ensembles de points.

On peut aller beaucoup plus loin dans cette étude des ensembles abstraits. Mais nous aurons surtout à utiliser dans la suite les propriétés spéciales aux ensembles de points (et particulièrement de points d'une droite). Plusieurs de nos résultats pourront se généraliser à l'espace à n dimensions, en appelant *point* un ensemble de n nombres réels : $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et *sphère* le lieu des points pour lesquels on a

$$(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2 \leqq R^2.$$

Le nombre positif r sera la *distance* du point $x_1, \ldots, x_n$ au centre $a_1, \ldots, a_n$; R est le rayon de la sphère.

La notion fondamentale qui s'introduit dans la considération des ensembles de points à un nombre quelconque de dimensions est celle de *point limite*. Nous dirons qu'un point A est point limite d'un ensemble E si, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver un point de l'ensemble E distinct de A et dont la distance à A soit plus petite que ε.

Il résulte évidemment de cette définition qu'il y a une infinité de points de E près de A.

Il y a souvent avantage à introduire la considération du point à l'infini. Il sera, par définition, point limite de E, s'il y a des points de E à l'extérieur d'une sphère quelconque.

L'ensemble E′ des points limites de E est l'ensemble dérivé de E. On dira que l'ensemble E est *fermé* s'il contient tous les points de son dérivé E′ et *parfait* s'il coïncide avec E′.

On voit immédiatement que *l'ensemble dérivé* E′ *d'un ensemble quelconque* E *est fermé.* En effet, près d'un point limite quelconque de E′, B, il y a des points A′ de E′ et, près de A′, il y a des points A de E. On peut s'arranger (ε étant un nombre positif donné) pour que les distances de B à A′ et ensuite de A′ à A soient plus petites que $\frac{\varepsilon}{2}$ et alors la distance de B à A sera plus petite que ε; car il résulte de la définition analytique de la distance qu'un côté d'un triangle est au plus égal à la somme

des deux autres. Donc un point limite quelconque de E′ est un point de E′.

L'étude de l'ensemble dérivé E′ d'un ensemble E peut dans certains cas nous révéler certaines propriétés de l'ensemble E, comme nous allons le voir. D'autre part, le sujet de cette étude est plus restreint, puisque E′ ne peut être donné *a priori* d'une façon quelconque, d'après le théorème précédent.

Théorème de Weierstrass-Bolzano. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ne contienne qu'un nombre fini de points est que son ensemble dérivé soit nul* (c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de points limites de E).

Il suffit évidemment de démontrer que, si un ensemble E contient une infinité de points, il a au moins un point limite. En effet : ou bien le point à l'infini est point limite; ou bien tous les points de E sont dans une sphère S de rayon fini. En agrandissant S, on peut supposer que S soit un volume limité par des plans parallèles aux plans de coordonnées (1). Menons maintenant des plans équidistants de ceux-ci; ils partageront S en un certain nombre de parties égales S_1, S'_1, ... et dans l'une au moins de ces parties, S_1 par exemple, il y aura une infinité de points de E. Opérons de même sur S_1; il y aura une des parties de S_1 au moins, soit S_2, qui contiendra une infinité de points de E, et ainsi de suite. On formera ainsi des régions S, S_1, S_2, ... contenant toutes une infinité de points de E, chacune intérieure à la précédente et qui tendent manifestement vers un point A situé à leur intérieur ou sur leur contour. Le point A sera un point limite de E, puisqu'il y aura une infinité de points de E aussi rapprochés de lui qu'on le voudra.

Nous allons maintenant démontrer une proposition analogue en utilisant une locution introduite par M. Ernst Lindelöf. Nous appellerons avec lui *point de condensation* d'un ensemble E, un point A tel que, dans une sphère de centre A et de rayon aussi petit que l'on veut, il existe une infinité *non dénombrable* de points de E. Le point à l'infini sera un point de condensation s'il

(1) Nous appelons plan coordonné l'ensemble des points pour lesquels on a $x_i = 0$; un plan parallèle à $x_i = 0$ est $x_i = a_i$; la distance des plans $x_i = a_i$, $x_i = b_i$ est $|a_i - b_i|$.

y a une infinité non dénombrable de points de E à l'extérieur d'une sphère de rayon aussi grand que l'on veut.

On peut alors répéter la démonstration du théorème précédent en remplaçant les mots : *infinité de points* par *infinité non dénombrable de points* et *points limites* par *points de condensation*. On prouvera ainsi que *tout ensemble non dénombrable admet au moins un point de condensation.*

Cette même notion permet de démontrer simplement la proposition suivante (¹) :

THÉORÈME DE CANTOR-BENDIXSON. — *Un ensemble* FERMÉ *quelconque* F *peut être décomposé en un ensemble parfait* P *et un ensemble dénombrable* D.

En effet, appelons P l'ensemble des points de condensation de F (ce sont des points de F puisque F est fermé) et soit D l'ensemble des autres points de F.

Je dis que P est parfait et D dénombrable.

Tout d'abord, P coïncide avec son dérivé P′. Car, soit A′ un point de P′, il y a près de A′ une infinité de points A de P dans une sphère de centre A′ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Près d'un point A, il y a une infinité non dénombrable de points B de F dans une sphère de centre A et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc, il y a une infinité non dénombrable de points de F dans la sphère de centre A′ et de rayon ε : A′ est un point de P.

Réciproquement, considérons deux sphères Σ_n, Σ'_n concentriques à un point A_1 de P et de rayons $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$. Entre ces deux sphères, il ne peut y avoir un nombre fini ou une infinité dénombrable de points de F quel que soit n. Sans quoi, on pourrait les désigner par a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ..., et alors, dans une sphère de centre A_1 et de rayon assez petit, il n'y aurait d'autres points de F que des points a_{ik} qui forment comme on l'a vu un ensemble dénombrable. Par conséquent, A_1 ne serait pas point de condensation de F.

Il y a donc *des* valeurs de n aussi grandes que l'on veut pour

(¹) Cette proposition a été démontrée d'abord au moyen de la considération des nombres transfinis.

lesquelles il y a un ensemble non dénombrable de points de F entre Σ_n, Σ'_n.

D'après le théorème démontré, il y aura au moins un point de condensation de F entre Σ_n et Σ'_n. Le rayon de Σ_n tendant vers zéro, A_1 sera un point limite de P. Ainsi P est parfait; il en résulte en particulier qu'un point de D ne peut être limite de points de P. Autrement dit, la distance d'un point bien déterminé C de D à un point quelconque A de P a un limite inférieure r non nulle. L'ensemble E_1 des points de D pour lesquels $r > \frac{1}{n}$ est dénombrable, sans quoi cet ensemble E_1 aurait au moins un point de condensation qui serait en même temps un point de condensation de F. Or ceci est impossible puisque $r > \frac{1}{n}$. Nous pourrons donc ranger les points de D pour lesquels $r > 1$ dans l'ordre c_{11}, c_{12}, c_{13}, ... puis ceux pour lesquels on a $1 \geqq r > \frac{1}{2}$ dans l'ordre c_{21}, c_{22}, c_{23}, ... et ainsi de suite. Tous les points de D pouvant être obtenus chacun une fois dans l'ensemble des c_{ik}, D est bien dénombrable. La démonstration précédente n'est exacte que si tous les points de l'ensemble sont à distance finie. Une simple transformation homographique ramènerait à ce cas l'hypothèse contraire.

Structure des ensembles parfaits linéaires.

Nous allons maintenant nous restreindre à la considération des ensembles de points situés sur le segment $(0, 1)$ que nous appellerons *intervalle fondamental.* Quelques-uns de nos résultats pourraient s'étendre comme les précédents aux ensembles de points à n dimensions, mais nous n'aurons pas à utiliser cette extension.

Considérons un ensemble de points de l'intervalle fondamental; nous dirons qu'il est *dense* dans un intervalle partiel (a, b), si son ensemble dérivé contient tous les points de cet intervalle. On voit qu'un ensemble dense dans un intervalle (a, b) contient, s'il est parfait, tous les points de cet intervalle.

Nous allons montrer maintenant comment on peut construire un ensemble *parfait* P défini dans l'intervalle fondamental. Soit,

dans cet intervalle, un point A n'appartenant pas à l'ensemble P [ce qui suppose que F n'est pas dense dans l'intervalle (o, 1)]. Supposons d'abord qu'il existe au moins un point B de P d'abscisse b supérieur à l'abscisse a de A. La limite inférieure des abscisses b est un nombre déterminé, β, abscisse d'un certain point N et l'on a $\beta \geqq a$. Le point N est évidemment point limite de P, c'est donc un point de P. Par suite, il ne peut coïncider avec A et l'on a : $\beta > a$. D'ailleurs, entre A et M, il n'y a certainement aucun point de P. Supposons de même qu'il y ait au moins un point C de P d'abscisse inférieure à a, on voit *qu'on pourra former un intervalle* MN *dont les extrémités seules appartiennent à* P *et qui contient* A *à son intérieur*.

Nous dirons, en adoptant une expression proposée par M. Baire, que l'intervalle MN ainsi défini est un *intervalle contigu* à l'ensemble parfait P.

Pour exprimer que A est entre M et N sans coïncider avec M ni avec N, nous dirons que A est intérieur à MN *au sens étroit ;* il serait intérieur *au sens large* s'il pouvait coïncider avec l'une des extrémités.

Il pourra exister des points A tels qu'il n'y ait pas de points de P *à droite* de A (c'est-à-dire d'abscisse supérieure). Dans ce cas, on pourrait encore construire un segment tel que MN, sauf que N serait le point 1 n'appartenant pas à P. De même, s'il n'y avait pas de points de P à gauche de A, M serait le point o.

Observons que si l'on détermine tous les segments tels que MN, *on obtient une infinité dénombrable de segments n'empiétant pas les uns sur les autres et n'ayant même pas d'extrémité commune.* Le fait que les intervalles contigus à P sont sans points communs résulte de leur définition même. De plus, ces segments forment un ensemble dénombrable. Car le nombre de ceux de ces segments dont la longueur est plus grande que $\frac{1}{n}$ est inférieur à n par suite des propriétés précédentes. D'après un raisonnement que nous avons fait plusieurs fois, cela suffit à démontrer notre proposition.

Il en résulte *qu'on obtiendra l'ensemble parfait* P (*qu'on a pris arbitrairement, mais distinct de l'ensemble des points de l'intervalle fondamental*) *en enlevant de cet intervalle les*

points intérieurs (au sens étroit) à un certain ensemble dénombrable E *d'intervalles* MN *sans points communs.* Réciproquement, si l'on opère ainsi EN SE DONNANT *a priori un ensemble* E, *nécessairement dénombrable, d'intervalles* MN *sans points communs, l'ensemble* P *obtenu est parfait.*

En effet, soit A' un point de l'ensemble dérivé P' de P; A' est un point de P sans quoi il serait intérieur *au sens étroit* à un intervalle MN qui ne contient pas de points de P autre que M ou N et alors A' ne serait pas point limite de P. Soit maintenant A un point de P, il faut montrer qu'il y a au moins un point de P distinct de A dans tout intervalle $\alpha\beta$ ayant pour milieu A et aussi petit que l'on veut. Or, ou bien il n'y a que des points de P dans l'un des deux intervalles $A\alpha$, $A\beta$ et alors la proposition est vérifiée; ou bien il y a au moins un point B_1 dans αA et un point B_2 dans βA qui n'appartiendraient pas à P. Les points B_1 et B_2 seront respectivement situés dans deux des intervalles enlevés $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ et, puisque A appartient à P, l'extrémité droite N_1 de l'un et l'extrémité gauche M_2 de l'autre seraient deux points de P contenus l'un entre B_1 et A, l'autre entre B_2 et A et par conséquent contenus entre α et β. De plus, l'un au moins de ces deux points est distinct de A, car les deux segments $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, étant distincts, sont sans points communs. Ainsi l'ensemble P est parfait. Remarquons en passant que, *s'il n'est dense dans aucun intervalle, on peut le considérer comme composé de l'ensemble dénombrable des points* M *(par exemple) et de l'ensemble dérivé de celui-ci.* Car, d'après la démonstration précédente, dans tout intervalle $\alpha\beta$ ayant pour milieu un point A de P il y a toujours un point M distinct ou non de A, à moins que P ne soit dense dans l'un des intervalles $A\alpha$, $A\beta$, ce qui est impossible dans notre hypothèse.

La même démonstration suppose qu'il existe au moins un point A dans l'ensemble P et alors il y en a nécessairement une infinité puisque A sera point limite. D'autre part, nous avons admis qu'on enlève de la droite seulement les points intérieurs au sens étroit aux segments MN (tous compris au sens large entre o et 1); mais la démonstration, pour être exacte, exige qu'on enlève le point 1 pour l'unique segment qui se termine en ce point, s'il en existe un et de même pour le point o.

Si E comprenait un segment qui soit précisément (o, 1) et qu'on enlève tous les points de ce segment, P n'aurait aucun point. *Si nous écartons ce cas,* P *a toujours une infinité de points.*

En effet, dans le cas contraire, P n'aurait aucun point. Ceci est manifestement impossible, si E ne comprend qu'un nombre fini de segments sans points communs. Or le cas où E comprendrait une infinité de segments sans points communs se ramène à celui-ci au moyen du théorème général suivant [1] qui s'applique à des intervalles quelconques empiétant ou non :

Si l'on a sur le segment (o, 1) *une infinité* E *d'intervalles partiels* MN, *tels que tout point de la droite soit intérieur* (*au sens étroit*) *à l'un au moins de ces intervalles, il existe* UN NOMBRE LIMITÉ *de ces intervalles, tel que tout point de la droite soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux.*

Ce théorème a été démontré par M. Em. Borel dans le cas d'une infinité *dénombrable* d'intervalles. Nous allons donner la généralisation de M. Lebesgue [2] au cas d'une infinité quelconque d'intervalles. Nous dirons qu'un point x de l'intervalle (o, 1) est *atteint* si l'on peut trouver un nombre fini d'intervalles MN qui recouvrent complètement l'intervalle (o, x) (en le débordant). Il faut démontrer que le point 1 est atteint. Le point o est dans un intervalle partiel au moins : $\mu\nu$; donc il y a certainement des points atteints entre o et 1 : ceux qui sont entre o et ν. Or tout point à la gauche d'un point atteint est atteint et tout point à la droite d'un point non atteint n'est pas atteint. Dès lors, si 1 n'est pas atteint, il y a un point x_0 entre o et 1 qui est le dernier point atteint ou le premier point non atteint. Il est situé dans un de nos intervalles : $\mu'\nu'$. Soient x_1 entre μ' et x_0, x_2 entre x_0 et ν'. Le point x_2 sera atteint au moyen des intervalles qui servent à atteindre x_1 (à la gauche de x_0) et de l'intervalle $\mu'\nu'$. Ceci est impossible puisque x_2 est à la droite de x_0. Donc 1 est atteint.

D'ailleurs, il est loisible de supprimer les portions de ces intervalles qui pourraient déborder à la droite de 1 ou à la gauche

(1) *Voir* Em. Borel, *loc. cit.* (p. 42). L'extension au domaine à n dimensions est immédiate; elle a été développée dans le Journal de M. Jordan : *Contribution à l'Analyse arithmétique du continu,* par Em. Borel (p. 357, fascicule IV, 1903).

(2) *Voir* Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris, Gauthier-Villars.

de o, et alors tout point (sauf les points o, 1) sera encore intérieur au sens étroit aux intervalles partiels. Il en serait de même pour le nombre fini d'intervalles que nous avons obtenu.

Théorème fondamental sur la mesure. — Considérons maintenant un ensemble *dénombrable* E d'intervalles quelconques MN compris dans (o, 1) au sens large.

Nous pourrons les ranger dans un ordre déterminé : M_1N_1, M_2N_2, ... Appelons σ_i la longueur de M_iN_i. Si les intervalles n'ont aucun point commun, on aura certainement : $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_q < 1$ pour toute valeur finie de q. Donc la série à termes positifs :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_q + \ldots$$

sera convergente et sa somme σ ne sera pas supérieure à *un*. Autrement dit, la longueur totale des intervalles enlevés, que nous pourrons appeler la *mesure* de E, est au plus égale à la longueur totale de l'intervalle (o, 1). Nous avons vu d'ailleurs que les points du segment (o, 1) ne sont pas nécessairement tous enlevés. On peut se demander s'il est possible (les intervalles MN *empiétant ou non*) que les points du segment (o, 1) soient tous enlevés sans que σ soit supérieur ou au moins égal à *un*. La réponse est évidemment négative dans le cas où il y a un nombre fini de segments MN. Il en est encore de même s'il y a une infinité dénombrable de segments MN puisque ce cas se ramène au précédent au moyen du théorème de M. Borel (p. 9). Ceci suppose que l'on enlève seulement de chaque segment MN les points intérieurs au sens étroit. *Le résultat est encore exact dans le cas contraire.* En effet, on enlèvera bien les points intérieurs à M_iN_i au sens large, si l'on supprime les points intérieurs au sens étroit au segment $M'_iN'_i$ qui a même milieu que M_iN_i et dont la longueur est $\sigma'_i = \sigma_i(1 + \varepsilon)$, ε étant un nombre positif fixe. Or, si la série $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots$ est convergente et de somme inférieure à *un*, on peut prendre ε assez petit pour que la série convergente $\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots$ ait aussi une somme inférieure à *un*. Mais, d'après ce qui précède, les points du segment (o, 1) ne pourraient être tous enlevés, quand on emploie les segments $M'_iN'_i$ au sens étroit. *A fortiori,* il en sera ainsi quand on enlève les segments M_iN_i au sens large.

En résumé, *lorsqu'on enlève du segment* (o, 1) *tous les points intérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles* M_iN_i *empiétant ou non les uns sur les autres et de longueur totale*

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_q + \ldots < 1,$$

il reste certainement des points non enlevés sur le segment (o, 1). On peut dans cet énoncé entendre le mot *intérieur* indifféremment au sens étroit ou au sens large.

Donnons un exemple d'un tel ensemble d'intervalles. On obtiendra certainement tous les nombres rationnels compris entre o et 1, dans la suite :

$$(S) \qquad \frac{0}{1}, \ \frac{1}{1}, \ \frac{0}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{2}, \ \frac{0}{3}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{3}, \ \frac{0}{4}, \ \ldots$$

(en supprimant les fractions non irréductibles, on a là une preuve directe que les nombres rationnels forment un ensemble dénombrable).

Soit $\frac{p_i}{q_i}$ le terme de rang i de cette suite, nous prendrons pour intervalle M_iN_i l'intervalle $\left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{\varepsilon}{q_i^3}, \frac{p_i}{q_i} + \frac{\varepsilon}{q_i^3}\right)$. On aura :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\varepsilon}{1^3} + \frac{2\varepsilon}{1^3} + \frac{2\varepsilon}{2^3} + \frac{2\varepsilon}{2^3} + \frac{2\varepsilon}{2^3} + \ldots \\ &= 2\varepsilon\left[\frac{(1+1)}{1^3} + \frac{(2+1)}{2^3} + \ldots + \frac{(q+1)}{q^3} + \ldots\right] = 2\varepsilon M, \end{aligned}$$

M étant la somme d'une série convergente. Donc, en prenant pour ε un nombre déterminé, assez petit pour que $2\varepsilon M$ soit inférieur à *un*, on aura $\sigma < 1$ et par conséquent en enlevant les intervalles M_iN_i il restera un ensemble G de points sur le segment o, 1.

En modifiant légèrement la construction, on peut obtenir un ensemble G parfait. En effet, supprimons d'abord de la suite des nombres $\frac{p_i}{q_i}$ les fractions non irréductibles. Puis enlevons successivement du segment (o, 1) les intervalles M_iN_i, qui correspondent chacun maintenant à un seul nombre rationnel et réciproquement; mais, en arrivant à l'intervalle de rang i, rapetissons cet intervalle de façon qu'il n'ait aucun point commun avec les précédents. On aura, à plus forte raison, $\sigma < 1$ et il y aura encore un ensemble G de points non enlevés. D'ailleurs, cette diminution des segments M_iN_i pourra se faire de façon qu'il reste encore

une infinité de segments M_iN_i *non nuls*. Sans quoi, il y en aurait un nombre fini sans points communs n'occupant pas tout le segment (0, 1); il resterait donc au moins un intervalle (a, b) de points non enlevés. Or ceci est impossible, car dans la suite des $\frac{p_i}{q_i}$ on pourrait trouver un terme de rang assez élevé pour être intérieur à cet intervalle au sens étroit et qui pourrait encore donner lieu à un nouveau segment M_iN_i.

Si maintenant on enlève les points intérieurs au sens étroit à cette infinité dénombrable d'intervalles sans points communs, on aura un ensemble parfait G (p. 8) et pourtant G ne sera dense dans aucun intervalle partiel (a, b) entre 0 et 1. Car, étant parfait, il contiendrait tous les points de (a, b), ce qui est impossible d'après ce qui précède [1].

M. Cantor a donné un exemple effectif d'un ensemble linéaire parfait qui n'est dense dans aucun intervalle entre 0 et 1. Il utilise dans ce but la représentation de l'abscisse dans le système de numération dont la base est 3. Un point compris dans l'intervalle fondamental sera représenté par l'expression $0,abcde\ldots$ où les nombres $a, b, c, d, e, \ldots$ sont tous 0, 1 ou 2. On peut toujours supposer, sauf pour le point 0, que les nombres $a, b, c, d, e, \ldots$ ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang, car on peut écrire, par exemple,

$$0,abcd1 = 0,abcd0222\ldots,$$
$$0,abcd2 = 0,abcd1222\ldots.$$

Cela posé, l'ensemble F sera formé de tous les points dont les abscisses $0,abcde\ldots$ *peuvent être écrites sans employer le chiffre* 1, en utilisant, s'il est nécessaire, la remarque précédente. On obtiendra tous les points de F en enlevant tous les autres. Or on y arrivera méthodiquement de la manière suivante.

On enlèvera d'abord les nombres dont le premier chiffre après la virgule est 1, puis les nombres dont les premiers chiffres après la virgule sont 01 ou 21, et ainsi de suite. On voit que cela revient à enlever les points intérieurs au sens étroit aux intervalles (0,1; 0,2); puis (0,01; 0,02) et (0,21; 0,22); puis (0,001; 0,002),

[1] Bien que nous ne puissions faire ici un historique complet, il est nécessaire de dire que Paul du Bois-Reymond a beaucoup contribué à élucider ces notions.

(0,021; 0,022), (0,201; 0,202), (0,221; 0,222),.... En définitive, on voit qu'on enlèvera les points intérieurs au sens étroit à une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs. Ainsi l'ensemble F est parfait; d'ailleurs, il n'est dense dans aucun intervalle. Car, étant parfait, il devrait contenir tout cet intervalle, ce qui est impossible : dans tout système de numération, entre deux nombres quelconques, on peut en intercaler un troisième dont l'un des chiffres après la virgule soit 1.

On peut même remarquer que si, avec les notations précédentes, on appelle *mesure de l'ensemble* F la quantité $1-\sigma$, *la mesure de* F *est nulle*. En effet, les longueurs de nos intervalles sont, écrites dans le système de numération ternaire : 0,1; puis 0,01; 0,01; puis 0,001; 0,001; 0,001; 0,001; ....

On a donc

$$\sigma = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \ldots = 1,$$

d'où

$$1 - \sigma = 0.$$

D'ailleurs, on peut former géométriquement nos intervalles d'une façon simple : on divise le segment (0, 1) en trois parties égales et l'on supprime la partie moyenne; puis on fait de même dans les intervalles restants et ainsi de suite.

Enfin, notons ce fait paradoxal qu'après avoir enlevé du segment (0, 1) une infinité de segments dont la longueur totale est égale à celle de ce segment, il reste un ensemble de points F qui a même puissance que l'ensemble des points de l'intervalle (0, 1). En effet, un point quelconque de F a pour abscisse $\alpha = 0, abcd\ldots$, où a, b, c, d, ... sont tous égaux, soit à 0, soit à 2. Faisons correspondre à un tel nombre α, le nombre α' obtenu en y remplaçant 2 par 1 *et supposé écrit dans le système binaire*. Le nombre α' sera compris entre 0 et 1 et l'on établira ainsi une correspondance *univoque et réciproque* entre les points α de F et les points α' compris entre 0 et 1. Il y a une petite difficulté à cause du fait que certains nombres peuvent s'écrire de deux manières dans le système de base 2; mais leur ensemble est dénombrable (ce sont les nombres qui peuvent s'écrire au moyen d'un nombre *fini* de chiffres après la virgule) de sorte que la difficulté se lève aisément.

On peut généraliser ce dernier résultat sous la forme suivante :

Théorème de M. Cantor. — *Tout ensemble parfait linéaire a la puissance du continu.*

Il suffit de prouver le théorème dans le cas où l'ensemble parfait P n'est dense dans aucun intervalle. Car autrement, en supposant par exemple P entre o et 1, l'ensemble P serait une partie de l'ensemble continu (o, 1) et d'autre part une partie de P, dense dans un intervalle (a, b), coïnciderait avec l'intervalle (a, b) et aurait par conséquent même puissance que (o, 1). P aurait bien dans ce cas la puissance du continu ([1]).

Supposons que P soit un ensemble parfait qui ne soit dense dans aucun intervalle. On peut l'obtenir en enlevant (au sens étroit) du segment (o, 1) une infinité dénombrable d'intervalles partiels sans points communs M_iN_i. Puisque P n'est dense dans aucun intervalle, c'est que dans tout intervalle (a, b) il y au moins un point n'appartenant pas à P. Donc dans tout intervalle (a, b), il y a tout ou partie d'un intervalle partiel M_iN_i; en particulier entre M_iN_i et M_jN_j, il y a au moins un intervalle entier M_kN_k.

Ceci étant, la méthode de M. Cantor consiste à établir une correspondance univoque et réciproque entre tous les segments M_iN_i et tous les nombres rationnels compris entre o et 1, de manière que deux éléments correspondants soient disposés de la même façon. Pour cela, observons qu'on peut obtenir tous les segments M_iN_i une fois et une seule en les rangeant de la façon suivante. Prenons un intervalle M_1N_1 quelconque entre o et 1, puis un intervalle M_2N_2 quelconque entre o et M_1N_1, M_3N_3 quelconque entre M_1N_1 et 1, M_4N_4 quelconque entre o et M_2N_2 ([2]), ..., en prenant ainsi un intervalle MN successivement entre chacun de ceux qu'on a déjà pris, etc. Si l'on opère de la même manière pour les nombres rationnels, l'ordre relatif de ces nombres rationnels sera bien le même que celui des intervalles MN. Mais il est nécessaire de prendre une précaution pour être certain d'épuiser tous les nombres rationnels et tous les intervalles. Lorsque, ayant pris $n-1$ nombres rationnels, on devra choisir

---

([1]) *Voir* Em. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note I.

([2]) Pour être sûr d'obtenir ainsi *tous* les segments, il suffit, en les supposant rangés d'une manière quelconque en suite dénombrable, de prendre chaque fois l'intervalle MN qui a le plus petit indice parmi tous ceux entre lesquels on a le choix.

le $n^{\text{ième}}$, au lieu de le prendre quelconque dans un certain intervalle déterminé $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right)$ on choisira le nombre rationnel de cet intervalle que l'on trouve le premier dans la suite :

$$(S) \qquad \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \quad \ldots$$

(ou dans tout autre ordre déterminé des nombres rationnels compris entre o et 1). Par cette méthode on obtiendra bien chaque nombre rationnel une fois et une seule. En effet, d'après la méthode suivie, chaque point rationnel utilisé n'est pris qu'une seule fois. D'autre part, soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel (quelconque entre o et 1) qui occupe le rang n dans la suite (S); il suffit de démontrer que si l'on a pris les $n-1$ précédents au bout d'un nombre fini A d'opérations, le $n^{\text{ième}}$ sera choisi à son tour. En effet, la valeur de $\frac{p}{q}$ se trouve entre deux des B nombres de la suite (S), qui ont été choisis après A opérations; soient α_k et α_h ces deux nombres, qui correspondent à deux certains intervalles M_kN_k, M_hN_h. Soit M_rN_r celui des intervalles compris entre ceux-ci qui a le plus petit indice. Le nombre rationnel qui correspond à M_rN_r est celui des nombres rationnels compris entre α_k, α_h que l'on trouve le premier dans la suite (S). C'est nécessairement $\frac{p}{q}$ qui devra donc être pris à la $r^{\text{ième}}$ opération.

Maintenant, faisons correspondre à un nombre rationnel quelconque $\frac{p}{q}$ l'extrémité droite M_r de l'intervalle correspondant M_rN_r. La disposition des points M_r est la même que celle des points $\frac{p}{q}$. Par suite, si M_r tend de façon quelconque vers un point m du segment (o, 1), $\frac{p}{q}$ tend vers un point déterminé β du segment (o, 1) et réciproquement. Je dis que la correspondance entre les points M_r et $\frac{p}{q}$, m et β est une correspondance univoque et réciproque entre les points de P (sauf les points N) et l'ensemble continu formé par les points du segment (o, 1). Il suffit évidemment de montrer : 1° que tout point de P qui n'est pas un point N est un point M_r ou un point m, ce qui a été établi page 8;

2° que tout point entre o et 1 est un point $\frac{p}{q}$ ou β, ce qui est évident.

Donc P a la puissance du continu. On aurait pu donner de ce fait une démonstration plus courte, mais la méthode précédente (due à M. Cantor) a l'avantage de fournir une correspondance *effective* remarquable entre les points de P (sauf les points N, dont l'ensemble est dénombrable) et les points de (o, 1).

Ensembles mesurables.

Nous avons eu déjà l'occasion (p. 13) de parler de la *mesure* d'un ensemble linéaire. On peut généraliser cette notion de plusieurs manières [1]. Cette extension est toute naturelle lorsque l'on considère un ensemble E formé des points d'une infinité d'intervalles sans points communs deux à deux et situés entre o et 1. On a vu que ces intervalles sont en infinité nécessairement dénombrable et que la somme

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \ldots$$

de leurs longueurs est déterminée et au plus égale à 1. Ce sera la *mesure* de E; et la longueur $1 - \sigma$ (qui peut être nulle) sera la mesure de l'ensemble complémentaire C(E).

Nous obtenons ainsi deux classes d'ensembles que nous pourrons appeler *mesurables*. On pourra en ajouter d'autres par les conventions suivantes. Si l'on a un ensemble dénombrable E d'ensembles mesurables E_i *sans points communs deux à deux*, la *mesure de* E sera la somme des mesures des ensembles E_i. Si un ensemble mesurable E_1 est compris dans un ensemble mesurable E_2, la *mesure de l'ensemble* $(E_1 - E_2)$ sera la différence $(\sigma_1 - \sigma_2)$ de leurs mesures respectives σ_1, σ_2.

On s'assure facilement [2] que la mesure ainsi définie est un nombre déterminé qui n'est jamais négatif, de sorte qu'on n'est

(1) La définition donnée dans le texte a déjà été exposée par M. Borel dans les *Leçons sur la théorie des fonctions* (p. 46). Elle a été généralisée par M. Lebesgue dans sa Thèse. On verra, dans ces deux Ouvrages, comment on est amené logiquement à la définition de la mesure.

(2) *Voir* par exemple Lebesgue, *Annali di Matematica*, 1902, p. 238.

jamais conduit à des contradictions. Lorsque les définitions précédentes pourront s'appliquer à un ensemble E, nous dirons que cet ensemble est mesurable. Ainsi un ensemble qui comprend un seul point est mesurable et sa mesure est nulle; car l'ensemble complémentaire est évidemment composé d'intervalles sans points communs dont la longueur totale est égale à 1. Il en résulte qu'un ensemble dénombrable est mesurable et que sa mesure est nulle. D'autre part, un ensemble parfait est évidemment mesurable, puisque l'ensemble complémentaire est formé d'intervalles sans points communs. Or, un ensemble fermé F est la somme d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble parfait P. Donc F est mesurable et sa mesure est celle de P.

Plus généralement, un ensemble dénombrable E d'ensembles parfaits sera mesurable. Il en est ainsi, même lorsque ces ensembles parfaits ont des points communs. Car on obtient chacun d'eux en enlevant du segment (0, 1) une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs. Par conséquent, on obtiendra l'ensemble total en enlevant de la droite une infinité dénombrable d'intervalles qu'on peut supposer sans parties communes, mais qui auront peut-être deux à deux une extrémité commune. Si l'on enlevait aussi ces extrémités communes, on aurait un ensemble mesurable E_1. L'ensemble E est donc mesurable, puisqu'il est la somme de l'ensemble E_1 et de l'ensemble des extrémités communes, lequel est nécessairement dénombrable.

Désignons en général par $(E_1 + E_2 + \ldots)$ l'ensemble des points qui appartiennent à l'un des ensembles E_1, E_2, ..., et par $(E_1, E_2, \ldots)$, l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à chacun des ensembles E_1, E_2, ...

Si les ensembles E_1, E_2, ... sont mesurables, les deux ensembles $(E_1 + E_2 + \ldots)$, $(E_1, E_2, \ldots)$ sont aussi mesurables [1]. Or, on peut remarquer que tous les ensembles que nous pourrons *effectivement* former seront obtenus chacun en effectuant un nombre fini de fois, sur des ensembles, sommes d'intervalles, ou sur leurs complémentaires, les opérations représentées par les symboles $(E_1 + E_2 + \ldots)$, $(E_1, E_2, \ldots)$. Par

(1) *Voir* par exemple Lebesgue, *loc. cit.*, p. 239, 240.

suite, ils seront tous mesurables. Pour préciser cela, nous examinerons un cas particulier.

Appelons *ensemble limite complet* des ensembles E_1, E_2, ... l'ensemble E formé des points qui appartiennent à une infinité d'entre eux. Appelons aussi *ensemble limite restreint* des ensembles E_1, ... l'ensemble R formé des points tels que, pour chacun d'eux, on puisse déterminer n de façon que ce point appartienne à E_n, E_{n+1}, ... On voit que l'ensemble R est contenu dans l'ensemble E; mais il ne lui est pas identique, en général.

On peut observer que l'ensemble limite complet E des ensembles E_1, E_2, ... est le complémentaire de l'ensemble limite restreint des complémentaires $c(E_1)$, $c(E_2)$, ... des ensembles donnés et de même en intervertissant les mots *complet* et *restreint*.

Je dis que, *si les ensembles* E_1, E_2, ... *sont mesurables, il en est de même des ensembles limites* E, R. En effet, si l'on pose $e_n = (E_n, E_{n+1}, \ldots)$, on voit que l'on a

$$R = (e_1 + e_2 + e_3 + \ldots).$$

Par suite R est mesurable. Mais alors l'ensemble limite restreint des ensembles $c(E_1)$, $c(E_2)$ ..., qui sont mesurables, sera mesurable. Donc le complémentaire E sera mesurable.

Nous allons même montrer qu'on peut avoir un renseignement sur la mesure de E (ou de R), même lorsqu'on ne connaît que les mesures des E_i.

Pour cela, faisons d'abord remarquer que si chacun des ensembles E_i était mesurable et contenu dans le précédent, la mesure de E serait la limite des mesures des ensembles E_i. En effet, l'ensemble $c(E)$ est évidemment de la forme

$$c(E) = \{c(E_1) + [E_1, c(E_2)] + \ldots + [E_n, c(E_{n+1})] + \ldots\}.$$

Or les ensembles $[E_n, c(E_{n+1})]$ sont sans points communs et par suite la mesure de $c(E)$ sera la somme de leurs mesures.

Donc, en appelant σ la mesure de E, σ_i la mesure de E_i, on a

$$1 - \sigma = (1 - \sigma_1) + (\sigma_1 - \sigma_2) + \ldots + (\sigma_n - \sigma_{n+1}) + \ldots.$$

D'où

$$\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n.$$

Supposons maintenant que parmi les ensembles E_i il en existe une infinité qui soient mesurables et tels que la mesure σ_i de chacun d'eux, F_i, reste supérieure ou égale à un nombre positif fixe k. Dans ces conditions, je dis que l'ensemble limite complet E contient un ensemble mesurable F dont la mesure n'est pas inférieure à k.

En effet, je vais d'abord montrer qu'étant donné ε (nombre positif plus petit que k), on peut former un ensemble mesurable G_1, de mesure supérieure ou égale à k, tel que (G_1, F_i) ait une mesure supérieure ou égale à $k - \frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit i.

Si l'ensemble F_1 ne peut pas être pris pour ensemble G_1, il y a un ensemble F_{i_1}, tel que : mes.$(F_1, F_{i_1}) < k - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Or on a

$$[F_1, c(F_{i_1})] + (F_1, F_{i_1}) = F_1.$$

Les deux premiers ensembles étant sans points communs, on aura

$$\text{mes.}[F_1, \ c(F_{i_1})] = \text{mes.} F_1 - \text{mes.}(F_1, F_{i_1}) \geqq \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Alors, posons

$$F'_1 = [F_1, c(F_{i_1})] + F_{i_1} = (F_1 + F_{i_1}).$$

L'ensemble F'_1 sera mesurable, sa mesure étant supérieure ou égale à $k + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Opérons sur F'_1 comme sur F_1 : ou bien F'_1 répond à la question, ou bien on formera un ensemble F'_2 dont la mesure sera supérieure ou égale à $\left(k + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$, et ainsi de suite; si aucun des ensembles formés au bout de p opérations ne satisfait aux conditions, le dernier F'_p sera mesurable et sa mesure sera supérieure ou égale à $k + p\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Or, lorsque p devient suffisamment grand, $k + p\frac{\varepsilon}{2}$ arrive à surpasser 1, ce qui est impossible. On trouvera donc l'ensemble cherché G_1 au bout d'un nombre limité d'opérations. D'ailleurs G_1 est évidemment formé de points tous contenus dans l'un au moins des ensembles $F_1, F_2, \ldots$. Mais les ensembles $G'_n = (G_1, F_{n+1})$ sont mesurables et leurs mesures sont supérieures ou égales à $k - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Par conséquent, on pourra, d'après ce qui précède, former un ensemble mesurable G_2 dont la

mesure n'est pas inférieure à $k - \frac{\varepsilon}{2}$ et tel que les mesures des ensembles (G_2, G'_n) soient supérieures ou égales à $k - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$. D'ailleurs, les points de G_2 seront tous contenus dans l'un des ensembles (G_1, F_2), (G_1, F_3) ..., c'est-à-dire dans l'un des ensembles $F_2, \ldots, F_n, \ldots$; ils sont tous aussi dans G_1.

Opérant sur les ensembles $G''_n = (G_2, G'_{n+2})$ comme sur les ensembles (G_1, F_{n+1}), on obtiendra un ensemble G_3 contenu dans G_2 et dont les points appartiennent à $F_3, F_4, \ldots$. De plus G_3 est mesurable, sa mesure n'est pas inférieure à $k - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$ et les ensembles (G_2, G''_n) ont leurs mesures supérieures ou égales à $k - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}$, et ainsi de suite; on aura des ensembles G_1, $G_2, G_3, \ldots, G_n, \ldots$ mesurables, chacun compris dans le précédent, et dont les mesures sont supérieures à $k - \varepsilon$. D'après ce que nous avons vu, leur ensemble limite G est mesurable et sa mesure, limite de la mesure de G_n, sera supérieure ou égale à $k - \varepsilon$. D'ailleurs, un point A de G appartient à tous les ensembles G_n, c'est donc un point de l'un des ensembles $F_1, F_2, F_3, \ldots$. Il ne peut appartenir seulement à un nombre fini de ces ensembles : $F_{m_1}, \ldots, F_{m_q}$. Car, si N est le plus grand des nombres $m_1, \ldots, m_q$, comme G est contenu dans G''_{N-1}, ses points appartiennent tous à l'un des ensembles $F''_{N+1}, F''_{N+2}, \ldots$. Donc A appartiendrait à d'autres ensembles que $F_{m_1}, \ldots, F_{m_q}$. Par conséquent, tout point de G est un point de E.

Prenons maintenant des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tendant vers zéro; soient $G(\varepsilon_1), G(\varepsilon_2), \ldots, G(\varepsilon_n), \ldots$, les ensembles qui se déduisent de ces nombres comme nous avons déduit G de ε; nous prendrons

$$F = [G(\varepsilon_1) + G(\varepsilon_2) + \ldots + G(\varepsilon_n) + \ldots].$$

L'ensemble F ainsi défini est contenu dans E et a une mesure au moins égale à k.

On pourrait définir F d'une manière plus simple, mais mettant moins en évidence sa construction : parmi les ensembles E_i, les F_i sont mesurables et de mesure $\geq k$; posons

$$H_n = F_n + F_{n+1} + \ldots$$

et soit H l'ensemble des points communs à tous les H_n; comme H_n est contenu dans H_{n-1} et de mesure au moins égale à k, H est de mesure au moins égale à k. Or E contient H; le théorème est donc démontré.

De cette démonstration il résulte que, *si les ensembles* E_i *sont mesurables et s'il y en a une infinité de mesure supérieure ou égale à* k, *l'ensemble limite complet* E (*qui est mesurable*) *a une mesure supérieure ou égale à* k.

Appliquons ce résultat aux ensembles $c(E_i)$; en tenant compte de ce que leur ensemble limite complet est $c(R)$, on arrive au résultat suivant : *si les ensembles* E_i *sont mesurables et s'il y en a une infinité dont les mesures soient inférieures ou égales à* h, *l'ensemble limite restreint* R (*qui est mesurable*) *a une mesure inférieure ou égale à* h. Ce résultat est d'ailleurs très aisé à démontrer directement.

Pour tirer de ces propositions tout ce qu'elles peuvent faire connaître sur la mesure de E et R, il suffit d'introduire *la plus grande et la plus petite des limites* (L et l) des mesures σ_i des ensembles E_i. On pourra prendre pour valeurs des nombres k et h, dans les énoncés précédents, les quantités $L - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$ où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Par suite, on peut dire que *la mesure de* E *est supérieure ou égale à* l et que *la mesure de* R *est inférieure ou égale à* L.

En particulier, *les ensembles* E, R *ne peuvent coïncider que si les mesures* σ_i *des ensembles* E_i *tendent vers une limite déterminée qui sera la mesure commune de* E *et de* R.

Ensembles de première catégorie.

M. Baire appelle *ensemble de première catégorie* tout ensemble dénombrable E d'ensembles E_1, E_2, ... qui ne sont denses dans aucun intervalle entre o et 1.

Un point appartiendra à l'ensemble E s'il appartient à l'un des ensembles E_1, E_2, ... Si les ensembles E_1, E_2, ... ont des points communs, ceux-ci ne seront comptés qu'une fois dans E. D'ailleurs, on peut supposer que E_1, E_2, ... soient sans points

communs. En effet, soit E'_2 l'ensemble des points de E_2 qui ne sont pas dans E_1, soit E'_3 l'ensemble des points de E_3 qui se sont ni dans E_1, ni dans E'_2, ... L'ensemble $E_1 + E'_2 + E'_3 + \ldots$ et l'ensemble E contiennent les mêmes points, chacun une fois. Et les ensembles E'_2, E'_3, ..., seront *a fortiori* non denses dans tout intervalle s'il en est ainsi pour E_2, E_3, ...

Soit $c(E)$ l'ensemble *complémentaire* de E, c'est-à-dire l'ensemble des points du segment (o, 1) qui ne figurent pas dans E. *L'ensemble* $c(E)$ *est dense entre* o *et* 1 ; c'est-à-dire que, dans un intervalle (a, b) quelconque, il y a des points qui n'appartiennent pas à E. En effet, dans (a, b), on peut trouver un intervalle (a_1, b_1) où il n'y ait aucun point de E_1 puisque E_1 n'est dense nulle part; de même, on peut trouver dans (a_1, b_1) un intervalle (a_2, b_2) où il n'y ait aucun point de E_2, ... Comme on peut prendre $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... aussi petits que l'on veut, on voit qu'on aura une suite d'intervalles $a_n b_n$ emboîtés les uns dans les autres qui tendront vers un point α. Il y a donc bien dans (a, b) un point α qui n'appartient pas à E, sans quoi α appartiendrait, par exemple, à l'ensemble E_p, ce qui est impossible puisqu'il est dans $a_p b_p$.

Un ensemble dénombrable d'ensembles de première catégorie $E^{(1)}$, ..., $E^{(n)}$, ... est encore de première catégorie. Car si $E^{(n)} = E_1^{(n)} + \ldots + E_p^{(n)} + \ldots$, l'ensemble des ensembles $E_p^{(n)}$ sera un ensemble dénombrable d'ensembles $E_p^{(n)}$ qui ne sont denses dans aucun intervalle.

Tout ensemble qui n'est pas de première catégorie sera, par définition, *de seconde catégorie;* un tel ensemble, nécessairement, sera dense dans au moins un intervalle partiel entre o et 1.

Par exemple, *l'ensemble des points de* (o, 1) *est de seconde catégorie* puisque, dans un intervalle partiel, *tous les points* de cet intervalle appartiennent à l'ensemble. Il en résulte que *si un ensemble quelconque* E *est de première catégorie, l'ensemble complémentaire* $c(E)$ est de seconde catégorie, sans quoi la somme de ces deux ensembles [c'est-à-dire l'intervalle (o, 1)] serait de première catégorie.



CHAPITRE II.

NOTIONS SUR LA CONTINUITÉ.

Oscillation en un point. — Nous nous bornerons d'abord au cas d'une fonction uniforme *d'une* variable réelle $f(x)$ définie dans un intervalle pour lequel nous pourrons prendre le segment $(0, 1)$.

Soit ξ un point compris dans l'intervalle partiel $(x-h, x+h)$. L'ensemble des valeurs $f(\xi)$ a toujours une limite supérieure $M(x, h)$ s'il existe un nombre fixe B tel que l'on ait toujours $f(\xi) < B$. S'il n'existe pas un tel nombre B, nous dirons encore que $f(\xi)$ a une limite supérieure $M(x, h) = +\infty$. De même, $f(\xi)$ a, dans tous les cas, une limite inférieure $m(x, h)$ qui est la limite supérieure de $-f(\xi)$. Observons que les limites supérieure et inférieure de $f(\xi)$ peuvent ne pas être atteintes; en particulier, il peut arriver que $f(\xi)$ soit toujours fini et que M soit infini. Tel serait le cas pour la fonction $f(x)$ qui est égale à q lorsque x est égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ et qui est nulle quand x est incommensurable.

On appellera *oscillation* dans l'intervalle $(x-h, x+h)$ la quantité $\omega(x, h) = M(x, h) - m(x, h)$.

Considérons maintenant les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans un intervalle $(x-h', x+h')$ plus petit que le précédent; soient $M(x, h')$, $m(x, h')$. On a $M(x, h') \leqq M(x, h)$ puisque les valeurs que prend $f(x)$ dans l'intervalle $x-h'$, $x+h'$ sont des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $x-h$, $x+h$. De même $m(x, h') \geqq m(x, h)$.

Si donc on fait décroître le nombre positif h, on voit que $M(x, h)$ décroîtra constamment ou du moins ne croîtra pas et inversement pour $m(x, h)$. D'ailleurs $M(x, h)$ reste manifestement supérieur ou égal à $f(x)$ et $m(x, h)$ inférieur ou égal à $f(x)$.

Ces deux quantités ont donc respectivement des limites $M(x)$ et $m(x)$ lorsque h tend vers zéro de façon quelconque et l'on a

$$m(x) \leq f(x) \leq M(x).$$

Les deux quantités $M(x)$ et $m(x)$ qui sont bien déterminées en chaque point x de l'intervalle 0, 1 sont appelées *le maximum et le minimum de la fonction* $f(x)$ *au point* x. Il peut d'ailleurs arriver que leurs valeurs soient infinies. On doit remarquer que les mots de *maximum* et de *minimum* ne sont pas employés ici dans leur sens ordinaire. Nous définirons aussi *l'oscillation de* $f(x)$ *au point* x, ce sera la quantité

$$\omega(x) = M(x) - m(x)$$

qui est toujours positive ou nulle (¹).

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ *soit continue en un point* x *est que son oscillation en ce point soit nulle.*

Par définition, la fonction $f(x)$ sera continue en x si, quelle que soit la quantité positive ε, on peut trouver un intervalle $(x - h, x + h)$ tel que l'on ait

$$f(x) - \varepsilon < f(\xi) < f(x) + \varepsilon,$$

lorsque ξ est quelconque dans cet intervalle.

S'il en est ainsi, on aura nécessairement

$$M(x, h) \leq f(x) + \varepsilon,$$
$$m(x, h) \geq f(x) - \varepsilon,$$

d'où

$$\omega(x, h) \leq 2\varepsilon.$$

D'ailleurs $\omega(x, h)$ ne croît pas lorsque h décroît et sa limite est $\omega(x)$. Donc $\omega(x)$ est inférieur ou égal à un nombre positif 2ε qui est aussi petit que l'on veut et, par suite, $\omega(x)$ est nul.

Réciproquement, si $\omega(x) = 0$, on aura

$$m(x) = f(x) = M(x).$$

(¹) Les définitions que nous venons de donner s'étendent immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Or on peut trouver un nombre h tel que l'on ait

$$M(x, h) - M(x) < \varepsilon,$$
$$m(x) - m(x, h) < \varepsilon.$$

Si ξ est compris entre $x - h$ et $x + h$, on aura

$$m(x, h) \leqq f(\xi) \leqq M(x, h),$$

d'où

$$f(x) - \varepsilon < f(\xi) < f(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, lorsqu'une fonction $f(x)$ est discontinue en un point x, l'oscillation est sûrement positive en ce point. Nous pourrons dire que la valeur de l'oscillation en un point est *la mesure* de la discontinuité en ce point. On peut alors compléter ainsi la proposition précédente :

La condition nécessaire et suffisante pour que la mesure de la discontinuité en un point x soit supérieure ou égale à un nombre b (positif ou nul) est que l'on puisse faire correspondre, à tout nombre positif ε, un nombre h tel que l'on ait pour $|\eta| < |h|$

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| > b - \varepsilon,$$

ξ_1 et ξ_2 étant deux certains points de l'intervalle $(x - \eta, x + \eta)$.

En effet, si cette condition est remplie, on a

$$\omega(x, \eta) = M(x, \eta) - m(x, \eta) \geqq |f(\xi_1) - f(\xi_2)| > b - \varepsilon.$$

Lorsqu'on fera tendre η vers zéro, on aura

$$\omega(x) > b - \varepsilon,$$

quel que soit ε et, par conséquent, $\omega(x) \geqq b$.

Réciproquement, si $\omega(x) \geqq b$, on peut trouver un nombre h tel que

$$\omega(x, h) > b - \frac{\varepsilon}{3},$$

ε étant un nombre positif donné. Or, on peut déterminer deux nombres ξ_1, ξ_2 dans l'intervalle $(x - h, x + h)$, tels que

$$f(\xi_1) > M(x, h) - \frac{\varepsilon}{3}, \quad -f(\xi_2) > -m(x, h) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| > \omega(x, h) - \frac{2\varepsilon}{3} > b - \varepsilon.$$

Il résulte presque immédiatement de notre proposition que *l'ensemble* E *des points où la mesure de la discontinuité de* $f(x)$ *n'est pas inférieure à* $b(b > 0)$ *est un ensemble fermé.*

En effet, soit α_1 un point limite, s'il en existe, de points α où l'on ait $\omega(\alpha) \geqq b$. On peut, dans tout intervalle $(\alpha_1 - \eta, \alpha_1 + \eta)$, trouver une infinité de points α; considérons un de ces points α distinct des extrémités de l'intervalle. Étant donné le nombre positif ε, on peut trouver un intervalle $(\alpha - \eta', \alpha + \eta')$ assez petit pour être compris dans le premier et dans lequel il existe deux points ξ_1, ξ_2 tels que

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| > b - \varepsilon.$$

Comme ξ_1 et ξ_2 sont compris dans l'intervalle $(\alpha_1 - \eta, \alpha_1 + \eta)$ et qu'on peut prendre η aussi petit que l'on veut, on aura $\omega(\alpha_1) \geqq b$ d'après le théorème précédent et par conséquent α_1 est lui-même un point α.

Bien entendu, il peut arriver qu'il n'y ait pas de points limites de points α et dans ce cas E ne contiendra qu'un nombre fini (ou même nul) de points α.

Fonctions ponctuellement discontinues. — On dit qu'une fonction $f(x)$ est ponctuellement discontinue entre 0 et 1, si l'ensemble de ses points de discontinuités ne contient aucun intervalle. C'est-à-dire que, dans tout intervalle (a, b) compris entre 0 et 1, on peut trouver un point où la fonction est continue. Soit E_n l'ensemble des points où l'oscillation de $f(x)$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{n}$. L'ensemble E des discontinuités de $f(x)$ est formé de tous les points qui figurent dans l'un au moins des ensembles E_i. L'ensemble E_n est un ensemble fermé, qui ne contient aucun intervalle puisqu'il est contenu dans E; donc il n'est dense dans aucun intervalle entre 0 et 1. Il en résulte que E est un *ensemble de première catégorie*. On sait même quelque chose de plus sur cet ensemble, car les ensembles E_n sont *fermés*.

Considérons maintenant un ensemble *dénombrable* de fonctions *ponctuellement discontinues* entre 0 et 1 : $f_1, \ldots, f_p, \ldots$; *dans tout intervalle* (a, b) *entre* 0 *et* 1, *il y a des points où*

toutes ces fonctions sont continues (¹). En effet, l'ensemble des points de discontinuité pour l'une des fonctions $f_1, \ldots, f_p, \ldots$ est l'ensemble dénombrable des ensembles de discontinuité de chacune de ces fonctions. Chacun d'eux étant de première catégorie, il en est de même de l'ensemble total (p. 22), ce qui démontre la proposition.

Continuité uniforme. — On dit que $f(x)$ est uniformément continue dans un intervalle a, b, si l'on peut faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre positif h tel que l'inégalité

$$|\xi_1 - \xi_2| < h$$

entraîne, pour deux points quelconques ξ_1, ξ_2 de l'intervalle (a, b), l'inégalité :

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon.$$

On voit d'abord que ceci ne peut avoir lieu que si $f(x)$ est continue en tout point de l'intervalle a, b.

Réciproquement, si $f(x)$ est continue en tout point de l'intervalle (a, b), extrémités comprises, $f(x)$ est uniformément continue entre a et b. La restriction relative aux extrémités est essentielle; ainsi, $\sin\frac{1}{x}$ est continu pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 sauf à l'extrémité $x = 0$; $\sin\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continu entre 0 et 1.

On connaît la démonstration classique du théorème que nous venons d'énoncer; M. Baire en a généralisé l'énoncé.

Théorème de M. Baire. — *Si, dans un intervalle* (a, b), *on a :* $\omega(x) \leqq b$, *on peut faire correspondre à tout nombre positif* ε *un nombre positif* η, *tel que l'inégalité* $|\xi_1 - \xi_2| < \eta$ *entraîne pour deux points quelconques* ξ_1, ξ_2 *de l'intervalle* (a, b), *l'inégalité :*

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < b + \varepsilon.$$

En effet, si x est un point de l'intervalle (a, b), on peut former

---

(¹) Ce théorème a été d'abord démontré par M. Volterra dans le cas d'un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_p$.

un intervalle $(x - h, x + h)$ dans lequel on aura :

$$\omega(x, h) - \omega(x) < \varepsilon,$$

ou

$$M(x, h) - m(x, h) < b + \varepsilon,$$

et alors ξ_1, ξ_2 étant deux points quelconques de cet intervalle, on aura :

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leqq M(x, h) - m(x, h) < b + \varepsilon.$$

Ainsi, à tout point x de l'intervalle (a, b) on peut faire correspondre un intervalle MN $(x - h, x + h)$ dans lequel l'inégalité précédente est vérifiée, et qui contient x à son intérieur au sens étroit. Donc, d'après le théorème (p. 9), on peut trouver un nombre fini de ces intervalles $M_1N_1, \ldots, M_qN_q$, tels que tout point de (o, 1) soit au moins dans l'un d'eux au sens étroit.

Ceci étant, si l'on marque les extrémités de ces segments, ils partagent la droite en un nombre fini d'intervalles $\alpha\beta$ dont la longueur minimum est un certain nombre positif η_1. Si deux points ξ_1, ξ_2 du segment (o, 1) sont séparés par une distance inférieure à η_1, ils sont dans le même intervalle $\alpha\beta$ ou dans deux intervalles $\alpha\beta$ contigus ; donc ils sont dans le même intervalle M_iN_i et l'inégalité est bien vérifiée.

Nombres dérivés.

Paul du Bois-Reymond et Dini ont étendu la notion de dérivée d'une fonction au cas d'une fonction continue quelconque. Considérons la quantité

$$\varphi(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

où h est une quantité petite et différente de zéro. L'expression $\varphi(x, h)$ est bien déterminée pour x fixe et h compris entre o et η; soient $L(x, \eta)$, $l(x, \eta)$ les limites supérieure et inférieure des valeurs de $\varphi(x, h)$. En supposant par exemple η positif, nous dirons que $x + \eta$ est à droite de x et nous appellerons nombres dérivés à droite de x par excès et par défaut les quantités :

$$\Delta_d^+ f(x) = \underset{\eta=0}{\text{limite}}\, L(x, \eta)$$

$$\Delta_d^- f(x) = \underset{\eta=0}{\text{limite}}\, l(x, \eta)$$

en supposant que η tende vers o par valeurs constamment positives et non nulles. Les quantités L et l auront bien chacune une limite (d'ailleurs finie ou non); car, lorsque η décroît, il en est manifestement de même de L et de $\frac{1}{l}$, et l'on a toujours $L \geqq l$.

On définira de même les dérivées à gauche $\Delta_g^{\pm} f(x)$ en supposant que η reste négatif. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit dérivable en x est évidemment que les quatre nombres dérivés soient égaux en ce point. On obtiendrait une classe plus étendue de fonctions en imposant la condition que les quatre nombres dérivés soient finis. Cette condition s'est introduite naturellement, indépendamment de la notion de nombre dérivé, dans la théorie des équations différentielles. C'est la condition dite de *Lipschitz* à laquelle on donne habituellement la forme

$$|f(x) - f(x')| < k|x - x'|.$$

La considération des nombres dérivés permet de généraliser certaines propriétés des fonctions dérivables. Par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions continues quelconques ne diffèrent que par une constante est que leurs nombres dérivés correspondants (supposés finis) soient égaux. Nous renverrons pour plus de détails au livre de M. Lebesgue (*loc. cit.*).

Intégrale.

Considérons une fonction $f(x)$ quelconque, définie entre o et 1. Riemann a donné la définition suivante de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Bornons-nous au cas où $a < b$ et divisons l'intervalle a, b en intervalles partiels séparés par les points (rangés dans l'ordre croissant de leurs abscisses).

$$x_0 = a, \qquad x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}, \qquad x_n = b,$$

et soient M_i, m_i les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i). Nous supposerons que la fonction est bornée entre a et b, c'est-à-dire reste comprise entre deux nombres finis M et m. Alors les nombres M_i, m_i sont finis et il en est de

même des deux sommes

$$S = M_1(x_1 - x_0) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}),$$

qui sont comprises entre $M(b-a)$ et $m(b-a)$.

M. Darboux a démontré (1) que ces deux sommes ont chacune une limite bien déterminée lorsque l'étendue de l'intervalle partiel maximum tend vers zéro. On pose

$$\lim S = \overset{+}{\int_a^b} f(x)\,dx,$$
$$\lim s = \underset{-}{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

La première est l'intégrale supérieure, la seconde est l'intégrale inférieure.

Par définition, la fonction $f(x)$ sera intégrable de a à b au sens de Riemann [ou intégrable (R)], si ces deux quantités sont égales et leur valeur commune sera la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Il est d'ailleurs évident que, *si la fonction $f(x)$ est continue de a à b, elle sera intégrable au sens de Riemann.* Car on pourra trouver un nombre δ tel que, si x' et x'' sont (entre a et b) dans un intervalle quelconque plus petit que δ, on ait

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Alors, en prenant les intervalles partiels plus petits que δ, on aura
$S - s = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + \ldots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) < \varepsilon(b-a)$.
Et par conséquent, comme ε est aussi petit que l'on veut, la limite de $S - s$ est nulle.

Il existe des fonctions qui sont intégrables (R) sans être continues : telle est, par exemple, la fonction égale à 0 entre 0 et $\frac{1}{2}$ et égale à 1 entre $\frac{1}{2}$ et 1. Mais toutes les fonctions ne sont pas intégrables (R). Il est nécessaire et suffisant pour qu'une fonction le soit, que la quantité $(S - s)$ tende vers zéro lorsque les longueurs des intervalles partiels tendent vers zéro.

---

(1) DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École normale*, 1875).

Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée $f(x)$ soit intégrable* (R) *est que la longueur totale δ des intervalles sans parties communes, tels que dans chacun d'eux l'oscillation totale soit supérieure ou égale à un nombre positif arbitraire ε, tende vers zéro lorsque, ε restant fixe, les longueurs de chaque intervalle tendent vers zéro*. En effet, quel que soit le mode de division, on aura $S - s \geqq \varepsilon\delta$. Donc δ tend vers zéro si la fonction est intégrable (R). Réciproquement, remarquons que, dans chaque intervalle, l'oscillation est plus petite que $M - m$. D'où

$$S - s \leqq (M - m)\delta + \varepsilon(1 - \delta) \leqq (M - m)\delta + \varepsilon,$$

et, lorsque les longueurs des divisions tendent vers zéro, on peut prendre ε, puis δ aussi petits que l'on veut, par conséquent $(S - s)$ tend vers zéro.

Remarquons que si l'*oscillation en un point* est supérieure ou égale à ε, l'*oscillation dans un intervalle* quelconque contenant ce point sera aussi supérieure ou égale à ε. Donc, l'ensemble E′ des points où l'oscillation est supérieure ou égale à ε est contenu dans l'ensemble E des points des intervalles où l'oscillation est supérieure ou égale à ε, et ceci dans un mode de division quelconque de l'intervalle fondamental (les points de division seuls pourraient avoir une oscillation supérieure à ε, il n'en résulte pas de difficulté).

D'ailleurs l'ensemble E′ est fermé (p. 26) et par suite mesurable. Dès lors, si la fonction est intégrable (R), la mesure δ' de E′ (inférieure à la mesure δ de E qui peut être rendue aussi petite que l'on veut) sera nulle. En particulier, *l'ensemble des discontinuités $f(x)$* (qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que E′) *sera de mesure nulle*. La réciproque est vraie; *voir* Lebesgue (*loc. cit.*), pages 29 et 109.

Généralisation de M. Lebesgue. — Pour obtenir l'intégrale de Riemann, on commence par diviser l'intervalle d'intégration en intervalles partiels et l'on multiplie la longueur de chacun d'eux par une ordonnée correspondante. M. Lebesgue suit une marche inverse; il commence par établir des divisions *dans l'in-*

tervalle de variation (m, M) de $f(x)$,

$$y_0 = m, y_1, y_2, \ldots, y_n = M.$$

Si la fonction ne décroissait jamais de a à b, les points pour lesquels on a

$$y_{i-1} < f(x) < y_i$$

seraient dans un seul intervalle de longueur e_i. Ceux pour lesquels on a

$$f(x) = y_i$$

seraient dans un intervalle de longueur e'_i (les quantités e_i, e'_i peuvent être nulles). Alors l'intégrale de Riemann serait évidemment la limite des quantités

$$(1) \qquad S = \sum_{i=1}^{i=n} e_i y_i + \sum_{i=0}^{i=n} e'_i y_i,$$

$$(2) \qquad s = \sum_{i=1}^{i=n} e_i y_{i-1} + \sum_{i=0}^{i=n} e'_i y_i.$$

C'est cette limite que nous prendrons encore comme valeur de l'intégrale (L) (intégrale de M. Lebesgue) pour une catégorie de fonctions beaucoup plus étendue, en généralisant la signification des quantités e_i, e'_i.

Pour cela, considérons une fonction $f(x)$ *définie pour tous les points d'un ensemble mesurable* E *et bornée* [1]. *Nous dirons qu'elle est intégrable* (L) *dans l'ensemble* E, *si l'ensemble* F *des points de* E *tels que*

$$A < f(x) < B$$

est mesurable quels que soient A *et* B *et s'il en est de même de l'ensemble* G *des points de* E *tels que*

$$f(x) = A$$

quel que soit A. En particulier, l'ensemble E peut être un inter-

---

[1] Dans tout ce qui suit nous n'avons considéré, pour plus de simplicité, que des fonctions bornées. Les résultats que nous démontrerons peuvent être étendus à certaines fonctions non bornées (*voir* Lebesgue, *Annali di Matematica*, 1902, p. 259).

valle (a, b) déterminé. Observons que l'ensemble G est l'ensemble des points communs aux ensembles F_n tels que

$$A - \frac{1}{n} < f(x) < A + \frac{1}{n}.$$

Donc si les ensembles F sont mesurables quels que soient A et B, il en sera de même des ensembles G. En remplaçant les inégalités précédentes par $A - \frac{1}{n} \leqq f(x) \leqq A + \frac{1}{n}$, on voit aussi que si les ensembles tels que $A \leqq f(x) \leqq B$ sont mesurables, la fonction est intégrable (L).

Si maintenant m et M sont les limites supérieures de $f(x)$ dans E et $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ des valeurs croissantes intermédiaires, avec $y_0 = m$, $y_n = M$, nous pourrons appeler e_i la *mesure* de l'ensemble des points tels que

$$y_{i-1} < f(x) < y_i$$

et e'_i la mesure de l'ensemble des points tels que

$$f(x) = y_i.$$

Les expressions (1), (2) donneront donc à S et s des valeurs finies bien déterminées et, en appliquant à ces sommes le raisonnement employé par M. Darboux pour l'intégrale de Riemann, on voit que ces deux expressions ont séparément des limites déterminées lorsque les longueurs des intervalles $y_i - y_{i-1}$ tendent vers zéro.

D'ailleurs

$$S - s = \sum_{i=1}^{i=n} e_i(y_i - y_{i-1}) \leqq e\,\Delta y,$$

en appelant e la mesure de E et Δy la plus grande longueur des intervalles $y_i - y_{i-1}$. Donc $S - s$ tend vers zéro avec Δy et par conséquent les deux limites S et s sont les mêmes. Cette limite commune est l'intégrale de M. Lebesgue,

$$(L) \int_E f(x)\,dx$$

prise dans l'ensemble E. Il est d'ailleurs manifeste que si deux ensembles E, E' sont sans points communs et si la fonction est

intégrable (L) dans chacun d'eux, elle sera intégrable (L) dans l'ensemble $E + E'$ et l'on aura

$$(L) \int_{E+E'} f\,dx = (L) \int_E f\,dx + (L) \int_{E'} f\,dx.$$

En particulier, si E est l'intervalle de a à b (au sens large ou étroit), l'intégrale s'écrira

$$(L) \int_a^b f\,dx.$$

Enfin, n'oublions pas d'observer que S et s sont tous deux compris entre Me et me.

Pour que l'intégrale de M. Lebesgue soit une généralisation utile, il faut qu'elle comprenne l'intégrale de Riemann comme cas particulier. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi : *Lorsqu'une fonction est intégrable* (R) *dans un intervalle* (a, b), *elle est intégrable* (L) *et les valeurs des deux intégrales* (R) *et* (L) *sont les mêmes dans cet intervalle.*

En effet, soit E l'ensemble des points où l'on a $A \leqq f(x) \leqq B$. Soit e l'ensemble des points limites de E n'appartenant pas à E : les points de e sont des points de discontinuités; ils forment un ensemble mesurable de mesure nulle puisque la fonction est intégrable (R). D'autre part, l'ensemble $E + e$ est fermé, et par suite mesurable. Il en est donc de même de E.

Dès lors $f(x)$ est intégrable (L) entre a et b.

Divisons (a, b) en intervalles partiels par les points en ordre croissant

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b.$$

Dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i) (où les limites de f sont m_i, M_i), on aura *pour les deux intégrales* (R) *et* (L)

$$m_i(x_i - x_{i-1}) < \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx < M_i(x_i - x_{i-1}).$$

D'où

$$\left| (L) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - (R) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \right| < (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Or, pour les deux intégrales, on a

$$\int_a^b = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}.$$

Dès lors

$$\left|(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\,dx - (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| < \Sigma(\mathrm{M}_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$< (\mathrm{M} - m)\sigma + \varepsilon(1 - \sigma)$$

en appelant σ la longueur totale des intervalles où l'oscillation est supérieure ou égale à ε. Puisque la fonction f est intégrable (R), on peut rendre ε et σ aussi petits que l'on veut. Donc la différence des deux intégrales est nulle.

Il résulte en particulier, de cette démonstration, que *toute fonction continue est intégrable* (L), ce qu'on aurait pu voir directement.

L'intégrale (L) coïncide avec l'intégrale (R) toutes les fois que cette dernière existe, mais l'intégrale (R) peut ne pas exister alors que l'intégrale (L) existe.

Considérons par exemple la fonction $f(x)$ qui est nulle pour les valeurs rationnelles de x et qui est égale à 1 pour les autres valeurs. Elle n'est pas intégrable (R) de 0 à 1. Car en un point *quelconque* l'oscillation est égale à 1. Mais elle est intégrable (L). Car l'ensemble des points rationnels entre 0 et 1 (qui est dénombrable) est mesurable et sa mesure est nulle. De même, l'ensemble des autres points est mesurable et sa mesure est 1. Donc la fonction a une intégrale (L) qui est égale à 1.

Nous donnerons d'ailleurs des catégories très étendues de fonctions qui sont intégrables (L) sans être, en général, intégrables (R) (p. 49).



CHAPITRE III.

SÉRIES DE FONCTIONS RÉELLES.

Considérons une série dont le terme général est une fonction de x (réelle comme dans tout cet Ouvrage)

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

et appelons $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de cette série.

Le premier problème qui se présente dans l'étude de cette série est l'étude de sa convergence. Nous ne nous en occuperons pas; nous ne considérerons que le cas où l'on sait que cette série converge pour toute valeur de x entre 0 et 1. La somme est une fonction de x que nous désignerons par $f(x)$. Le second problème qui se pose est de chercher les propriétés de $S_n(x)$ qui se conservent à la limite lorsque n croît indéfiniment. M. Osgood a fait remarquer que ce problème peut souvent se ramener au problème général de l'interversion dans la « double limite » [1].

Ainsi, on peut se demander si $f(x)$ est continu, lorsque $S_n(x)$ est constamment continu (c'est-à-dire lorsque u_n est continu). Cela revient à chercher si l'égalité

$$\lim_{x=a}\left[\lim_{n=\infty} S_n(x)\right] = \lim_{n=\infty}\left[\lim_{x=a} S_n(x)\right]$$

est exacte.

De même, on peut se demander si l'intégrale de $f(x)$ est la limite de l'intégrale de $S_n(x)$. Or cela revient encore à chercher si l'égalité suivante est exacte

$$\lim_{n=\infty}\left[\lim_{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=p}\frac{b-a}{p}\,S_n\left(a+q\,\frac{b-a}{p}\right)\right]$$
$$=\lim_{p=\infty}\left[\lim_{n=\infty}\sum_{q=0}^{q=p}\frac{b-a}{p}\,S_n\left(a+q\,\frac{b-a}{p}\right)\right].$$

---

(1) Osgood, *Bulletin of the American mathematical Society*, nov. 1896, p. 61.

Cette question de l'interversion des limites se présente d'ailleurs dans un grand nombre d'autres parties de l'Analyse; par exemple dans la dérivation sous le signe $\int$, dans l'expression d'une intégrale double sous forme d'intégrales simples, etc.

Avant d'entrer dans l'étude des problèmes précédents qui exigeront certaines restrictions relatives à la continuité des fonctions $u_n(x)$, nous démontrerons un théorème très général qui suppose seulement que la série considérée est convergente. Désignons par $r_n(x)$ le reste de la série : $r_n(x) \equiv f(x) - S_n(x)$.

Si la série $f(x)$ est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 *et* 1, *et si l'on appelle* E_n *l'ensemble des points pour lesquels* $|r_n(x)|$ *est supérieur à un nombre positif* ε *donné, aussi petit que l'on veut, la mesure de* E_n *tend vers zéro lorsque* n *croît indéfiniment* [1].

En effet, il nous suffira de montrer que l'ensemble E, limite complète de E_n lorsque n croît indéfiniment, a une mesure nulle (p. 21). Or cela est certain, car E ne comprend aucun point. S'il y avait un point x_1 dans E, il y aurait une infinité d'ensembles E_{n_1}, E_{n_2}, ... qui contiendraient x_1; et par conséquent les quantités

$$|r_{n_1}(x_1)|, \quad |r_{n_2}(x_1)|, \quad \ldots, \quad |r_{n_p}(x_1)|, \quad \ldots$$

restant supérieures à ε, la série ne serait pas convergente en x_1.

Ce théorème, par sa généralité, paraît susceptible d'un grand nombre d'applications; nous en donnerons quelques-unes.

Il a été démontré pour la première fois par M. Arzela dans un cas particulier [2].

Continuité de la série.

Supposons maintenant que les fonctions $u_n(x)$ soient des fonctions continues dans un intervalle (a, b) où la série est conver-

---

[1] Dans les applications, l'ensemble E_n sera toujours mesurable. Cependant, on peut se passer de cette remarque, en remplaçant dans l'énoncé précédent la mesure de E_n par la limite supérieure des mesures des ensembles mesurables contenus dans E_n.

[2] *Mémoires de Bologne*, 1899.

gente. Il n'est nullement évident que la somme $f(x)$ doit être elle-même continue (comme le montre bien notre interprétation par la double limite).

Remarquons qu'il est tout aussi général de se donner une série par la somme de ses n premiers termes $S_n(x)$ que par le terme général $u_n(x)$. Car une série quelconque peut s'écrire sous la forme

$$S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots$$

et par conséquent ce n'est pas construire une série d'une façon vraiment artificielle que de la donner en choisissant S_n au lieu de u_n.

Cette remarque faite, il suffit de prendre :

$$S_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$$

pour voir que la série ainsi définie est convergente pour toute valeur finie de x et que ses termes sont des fonctions continues de x. Cependant la somme de la série est 1 lorsque $x > 0$, 0 lorsque $x = 0$, -1 lorsque $x < 0$.

La question s'est donc posée de rechercher à quelles conditions la continuité des termes d'une série convergente entraîne la continuité de la somme.

Convergence uniforme.

Un premier pas fut fait dans cette voie par l'introduction de la notion de convergence uniforme (1).

Nous dirons (2) qu'une série quelconque $f(x)$ est *uniformément convergente* dans l'intervalle (a, b), si, à tout nombre positif ε donné à l'avance, aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne *dans tout l'intervalle* (a, b),

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

(1) *Voir* STOKES, *Mathematical and physical papers*. Cambridge, 1840, p. 236-285, et aussi Seidel et Lejeune-Dirichlet dans la collection : *Ostwald's Klassiker*, n° 116. Stokes et Seidel paraissent avoir élucidé en même temps cette question, indépendamment l'un de l'autre.

(2) *Voir* TANNERY, *Fonctions d'une variable*. 1886, note de la page 366.

Remarquons d'abord que la série $f(x)$ sera convergente dans (a, b). Je dis de plus que *la continuité des termes entraînera celle de la somme*. En effet, si x' et x'' sont entre a et b, on aura

$$(1) \qquad |f(x')-f(x'')| \leqq |S_n(x') - S_n(x'')| + |r_n(x')| + |r_n(x'')|$$

et si l'on prend pour n un nombre *fixe* supérieur à N, la fonction $S_n(x)$ est une fonction continue entre a et b; donc on peut prendre un nombre α tel que pour

$$|x' - x''| < \alpha$$

on ait

$$|S_n(x') - S_n(x'')| < \varepsilon.$$

D'où

$$|f(x') - f(x'')| < 3\varepsilon.$$

Au contraire, *supposons seulement que la série soit convergente entre a et b*. A tout nombre x compris entre a et b on pourra faire correspondre un nombre N tel que $n > N$ entraîne $|r_n(x)| < \varepsilon$. Le nombre N sera bien déterminé pour chaque valeur de x, si l'on prend toujours pour N le plus petit nombre entier possible. On voit alors qu'il revient au même de dire que la série est uniformément convergente entre a et b ou de dire que la fonction $N(x)$ que nous venons de définir est (pour chaque valeur de ε) bornée dans cet intervalle.

Si nous supposons de plus que les termes de $f(x)$ soient continus, il résulte de ce qui précède que, dans le voisinage d'un point de discontinuité x_1 de $f(x)$, la fonction $N(x)$ a une limite supérieure infinie pour une valeur suffisamment petite σ donnée à ε. On peut même préciser ce résultat : *si l'oscillation $\omega(x)$ au point x_1 est supérieure à un nombre positif b, on peut prendre pour σ le nombre $\frac{b}{2}$*. En effet, supposons qu'en prenant pour ε le nombre $\frac{b}{2}$, la fonction $N(x)$ reste inférieure à un nombre entier n dans un intervalle assez petit $(x_1 - h, x_1 + h)$. On pourrait prendre un intervalle encore plus petit $(x_1 - h_1, x_1 + h_1)$ où l'oscillation de la fonction continue $S_n(x)$ serait inférieure à un nombre quelconque positif donné, par exemple : $\omega(x_1) - b - \eta$.

Et alors l'inégalité (1) montre que l'on aurait dans cet intervalle

$$|f(x') - f(x'')| < \omega(x_1) - \eta,$$

ce qui est manifestement impossible (p. 27).

La condition de convergence uniforme d'une série de fonctions continues n'est pas *nécessaire* pour la continuité de la série. M. Bendixson (¹) en donne l'exemple très général suivant. Considérons une série convergente et à termes continus entre a et b, mais non uniformément convergente, et soit $r_n(x)$ le reste. La série

$$r_1 - r_1 + r_2 - r_2 + \ldots$$

converge *vers zéro* entre a et b, mais elle n'y converge pas uniformément.

Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, il faudrait donc donner une définition de la convergence uniforme moins serrée, pour ainsi dire, que celle que nous avons donnée.

M. Dini (²) a réalisé ce but en partie au moyen de ce qu'il appelle la *convergence uniforme simple*.

On dira qu'une série a une convergence uniforme simple entre a et b, si : 1° la série reste convergente dans cet intervalle; 2° pour tout nombre positif ε aussi petit que l'on veut *et pour tout nombre entier* N aussi grand que l'on veut, il existe *un* nombre entier $n \geqq N$ tel que l'on ait

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

pour tous les points de l'intervalle (a, b).

Cette définition comprend comme cas particulier la définition ordinaire de la convergence uniforme. Par conséquent, M. Dini a étendu les résultats précédents lorsqu'il a démontré que, *si une série à termes continus a une convergence uniforme simple, elle est continue.*

Ainsi le dernier exemple que nous avons donné est une série

(¹) *Voir* Bendixson, *Sur la convergence uniforme des séries*, Ofversigt of. Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897, n° 10, Stockholm.

(²) Dini, *Fundamenti per la teorica delle Funzioni di variabili reali*, Pise, 1878, p. 103.

qui a une convergence uniforme simple, car les restes de rangs impairs sont nuls.

Mais cette extension n'est pas encore suffisante. M. Bendixson (*loc. cit.*) donne en effet des exemples de séries convergentes, à termes continus, dont la convergence n'est pas une convergence uniforme simple et qui définissent pourtant des fonctions continues [1].

Ainsi, considérons la série telle que

$$S_n(x) = x^n - 1 + \frac{n(1-x)}{1+n(1-x)}.$$

Les termes sont continus lorsque x reste compris entre 0 et 1 et elle converge vers zéro, même pour $x = 1$. Pourtant sa convergence n'est pas uniforme, car pour $x = 1 - \frac{1}{n}$, on a

$$|r_n(x)| = |S_n(x)| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

Par suite, pour tout nombre n, il existe un nombre x pour lequel $|r_n(x)|$ est supérieur à un nombre positif fixe.

Convergence quasi-uniforme.

C'est M. Arzela qui est parvenu le premier à la condition nécessaire et suffisante cherchée. Il l'obtient au moyen de ce que nous appellerons la *convergence quasi-uniforme* [2] qui est une nouvelle extension de la convergence uniforme ordinaire.

Nous dirons qu'*une série converge quasi-uniformément entre a et b si : 1° la série converge entre a et b*; *2° on peut faire correspondre à tout nombre ε positif aussi petit que l'on veut et à tout nombre* N *aussi grand que l'on veut, un nombre fini,* $N' \geq N$, *tel que, pour chaque valeur de x comprise entre a et b, il existe un entier n_x compris entre* N *et* N', *et tel que l'on ait :*

$$|r_{n_x}(x)| < \varepsilon.$$

---

(1) *Voir* aussi JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 315.

(2) M. Arzela l'appelle convergence uniforme *à traits* (a tratti). Cette dénomination se rattache à la représentation géométrique dont M. Arzela fait grand usage (*Mémoires de Bologne*, 1899).

Nous allons maintenant démontrer le théorème qui résout complètement la question de la continuité. Ce théorème a été obtenu par M. Arzela par une méthode assez compliquée. Mais, comme il arrive bien souvent, une proposition qui a été obtenue au prix de grands efforts peut, quand son énoncé est connu, être démontrée très simplement.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série à termes continus entre a et b représente une fonction continue dans cet intervalle est qu'elle y converge quasi-uniformément.

La condition est suffisante. En effet, d'abord la série est convergente entre a et b; soient $f(x)$ sa somme et x' un point quelconque entre a et b. On peut déterminer un nombre N tel que l'inégalité $n > \mathrm{N}$ entraîne

$$|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais, puisque la série est quasi-uniformément convergente entre a et b, on peut faire correspondre à ε et N un nombre $\mathrm{N}' > \mathrm{N}$, tel que, pour toute valeur de x comprise entre a et b, il existe un nombre n_x compris entre N et N′ pour lequel

$$|r_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or, quel que soit x, $n_x > \mathrm{N}$, donc

$$|r_{n_x}(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, il est possible de déterminer un nombre h_p, tel que l'inégalité $|x' - x''| < h_p$ entraîne

$$|\mathrm{S}_{\mathrm{N}+p}(x') - \mathrm{S}_{\mathrm{N}+p}(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, si α est le plus petit des nombres

$$h_0, \quad h_1, \quad \ldots, \quad h_{\mathrm{N}'-\mathrm{N}}$$

(dont il y a un nombre *fini*), on aura sûrement

$$|\mathrm{S}_{n_{x'}}(x') - \mathrm{S}_{n_{x'}}(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pour $|x' - x''| < \alpha$, puisque $n_{x'}$ est compris entre N et N′.

Et comme on aura

$$|r_{n_{x''}}(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |r_{n_{x''}}(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

on voit que

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x' - x''| < \alpha.$$

Donc la fonction f est continue en un point arbitraire x' de l'intervalle.

Réciproquement, supposons la série convergente et sa somme continue (ainsi que ses termes) entre a et b. Soit x' un point compris entre a et b, on peut déterminer h tel que l'on ait

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $|x - x'| < h$. Mais soit N un nombre donné aussi grand que l'on veut; on peut déterminer un nombre $n > N$ de façon que l'on ait

$$|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre n étant ainsi choisi, la fonction $S_n(x)$ est continue et l'on peut déterminer h_1, tel que l'on ait

$$|S_n(x) - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad |x - x'| < h_1.$$

Or

$$|r_n(x)| \leqq |f(x) - f(x')| + |S_n(x) - S_n(x')| + |r_n(x')|.$$

Dès lors, si α est le plus petit des nombres h et h_1, on a

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x'| < \alpha,$$

n étant un nombre fixe supérieur à N.

Il suffit pour le raisonnement précédent que $f(x)$ soit continu *au point* x'. Mais, puisque $f(x)$ est continu *de* a *à* b, on pourra déterminer pour chaque point x de cet intervalle un nombre $n > N$, et un intervalle partiel ayant ce point pour milieu tel que $|r_n(x)|$ reste inférieur à ε dans cet intervalle partiel. Alors, tout point de (a, b) est intérieur au sens étroit à l'un de ces intervalles partiels; on peut donc (p. 9) trouver un nombre fini de ces intervalles :

$$(x_i - \alpha_i, x_i + \alpha_i) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

qui jouissent de cette propriété. Par conséquent, à tout point x de (a, b) on peut faire correspondre un entier n_x, tel que l'on ait

$$|r_{n_x}(x)| < \varepsilon.$$

Et les nombres n_x sont pris parmi les nombres n_{x_i}; on peut donc déterminer un nombre N' (le plus grand des entiers n_{x_i}, qui sont en nombre limité p) tel que n_x reste compris entre N et N'.

On peut donner, de cette réciproque, une démonstration un peu différente. La série étant convergente entre a et b, on peut faire correspondre à chaque nombre x compris entre a et b, un entier n_x supérieur à un nombre fixe donné N indépendant de n, tel que

$$|r_{n_x}(x)| < \varepsilon.$$

Et le nombre n_x sera une fonction bien déterminée de x, si l'on prend pour n_x le plus petit entier possible supérieur à N satisfaisant à cette condition. Je dis que cette fonction est bornée supérieurement. En effet, s'il n'en était pas ainsi entre a et b, la fonction n_x ne serait pas non plus bornée dans l'un des deux intervalles moitiés, ni dans l'un des intervalles moitiés de celui-là, et ainsi de suite. On formera ainsi des intervalles (a_p, b_p) emboîtés les uns dans les autres et dont la longueur tend vers zéro. Ils ont donc pour limite un certain point ξ de l'intervalle (a, b). Or nous avons vu, dans la première partie de la démonstration précédente, qu'on pourrait déterminer h et $n_1 > N$ tels que

$$|r_{n_1}(x)| < \varepsilon$$

dans l'intervalle $\xi - h$, $\xi + h$. Mais si petit que soit h, on pourra prendre p assez grand pour que (a_p, b_p) soit contenu entre $\xi - h$ et $\xi + h$, et alors dans l'intervalle (a_p, b_p) la fonction n_x serait bornée supérieurement $(n_x \leqq n_1)$, ce qui amène une contradiction.

On peut vérifier sur l'exemple que nous avons donné d'une série convergente à termes continus dont la somme n'est pas continue que cette série n'est pas quasi-uniformément convergente.

Nous avions pris $S_n = x^{\frac{1}{2n-1}}$; pour $x > 0$, le reste est $1 - x^{\frac{1}{2n-1}}$. Dans l'intervalle $(0, 1)$, si l'on veut que ce reste soit inférieur à ε,

il faudra que l'on ait

$$2n-1 > \frac{L\frac{1}{x}}{L\frac{1}{1-\varepsilon}};$$

par conséquent la valeur minimum de n ne sera pas bornée supérieurement dans cet intervalle.

Les considérations qui précèdent s'étendent immédiatement aux séries de fonctions de plusieurs variables. Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions de plusieurs variables continues par rapport à leur ensemble dans un domaine fermé* D *ait pour somme une fonction continue dans* D *est que la série converge quasi-uniformément dans* D. Cela veut dire qu'on peut faire correspondre à un nombre entier N et à un nombre positif ε, un nombre entier $N' \geqq N$ tel que l'on ait en tout point A de D : $|r_{n_A}| < \varepsilon$, n_A étant un certain nombre entier déterminé par A et compris entre N et N'. La démonstration est la même que celle que nous avons donnée.

Intégration des séries.

Deux problèmes se posent tout d'abord, quand on veut intégrer une fonction représentée par une série : 1° En supposant la série convergente et à termes intégrables entre 0 et 1, la somme sera-t-elle aussi intégrable? 2° Si la somme et les termes de la série sont intégrables, est-ce que l'intégrale de la somme sera la somme des intégrales des termes? Le premier problème a deux solutions différentes selon que l'on se place au point de vue de Riemann ou à celui de M. Lebesgue. Mais il suffira évidemment de résoudre le second problème au sens de M. Lebesgue pour en obtenir la solution au sens de Riemann comme cas particulier.

M. Arzela (1) a montré que *la condition nécessaire et suffisante pour que la somme $f(x)$ d'une série convergente de a*

(1) ARZELA, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de Bologne,* 27 mai 1900.

à b et dont les termes u_n sont intégrables (R) *de* o *à* 1, *soit intégrable* (R) *de* o *à* 1 *est que la série ait une convergence quasi-uniforme* EN GÉNÉRAL *entre* o *et* 1.

Cette dernière expression a la signification suivante : 1° la série $f(x)$ est convergente entre o et 1 et sa somme est bornée; 2° étant donnés les nombres δ, ε, N, on peut déterminer entre a et b des intervalles I *en nombre fini* et sans partie commune, de longueur totale supérieure à $1-\delta$, tels que l'on ait $|r_{n_1}(x)| < \varepsilon$ lorsque x appartient à un intervalle I, le nombre entier n_1 (constant dans un intervalle I) restant supérieur à N [1].

Supposons ces conditions vérifiées et que les termes de la série soient intégrables (R). Dans tous les intervalles I en nombre p, on aura

$$|f(x) - S_{n_1}(x)| < \varepsilon;$$

par suite, l'oscillation de $f(x)$ dans I sera au plus égale à 2ε augmenté de l'oscillation de S_{n_1}. Or, dans l'intervalle I, S_{n_1} est intégrable (R); on peut donc y former un nombre fini d'intervalles J, sans partie commune, de longueur totale inférieure à $\frac{\delta}{p}$ et en dehors desquels l'oscillation de S_{n_1} est inférieure à ε. Appelons K les intervalles sans parties communes intérieurs aux I et extérieurs aux J; dans ces intervalles, l'oscillation de $f(x)$ sera inférieure à 3ε. Mais la longueur totale des K entre o et 1 est supérieure à $1 - \delta - p\frac{\delta}{p} = 1 - 2\delta$. Dès lors, on aura pu diviser le segment (o, 1) en intervalles tels que la longueur totale de ceux où l'oscillation surpasse 3ε soit inférieure à 2δ. Comme ε et δ peuvent être pris aussi petits que l'on veut, la fonction bornée $f(x)$ est intégrable (R) entre o et 1.

Réciproquement, admettons que $f(x)$ soit intégrable (R), ainsi que les termes de la série (supposée convergente de o à 1). Soient, d'autre part, F l'ensemble des points où $f(x)$ est continu, E_n l'ensemble des points où $S_n(x)$ est continu, E l'ensemble limite com-

[1] La série serait quasi-uniformément convergente si cette condition était réalisée pour des intervalles I en nombre fini sans parties communes *qui remplissent tout le segment* (o, 1).

plet des E_n. Les ensembles E_n et F ont pour mesures 1 (p. 31), il en est donc de même pour E (p. 21). Or on a

$$F = (E, F) + [C(E), F].$$

Les deux ensembles du second membre n'ont pas de point commun; donc

$$\text{mesure}(E, F) = \text{mesure}\, F - \text{mesure}[C(E), F].$$

Or l'ensemble $[F, C(E)]$ est contenu dans $C(E)$ dont la mesure est nulle. Par suite, la mesure de l'ensemble G des points communs à E et F est égale à $1 - 0 = 1$. Ceci étant, soit x' un point de G, il est contenu dans une infinité d'ensembles E_n : E_{n_1}, E_{n_2}, ...

Or on peut déterminer un nombre q tel que l'inégalité $m > q$ entraîne $|r_m(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit maintenant un nombre N donné à l'avance; prenons parmi les nombres $n_1, n_2, \ldots$, qui croissent indéfiniment, un nombre déterminé n supérieur à q et N. On aura

$$|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n > N.$$

De plus, x' sera commun aux deux ensembles E_n et F. Par conséquent, on pourra déterminer un nombre h tel que l'inégalité $|x - x'| < h$ entraîne

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$|S_n(x) - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où

$$|r_n(x)| \leqq |r_n(x')| + |f(x) - f(x')| + |S_n(x') - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi tout point x' de l'ensemble G est intérieur au sens étroit à un intervalle I pour lequel il existe un nombre n tel que l'on ait en tout point de l'intervalle I

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

Or l'ensemble complémentaire $C(G)$ ayant une mesure nulle, ses points pourront être tous enfermés au sens étroit dans des

intervalles J sans point commun de longueur totale inférieure à η [1]. Alors tous les points du segment peuvent être enfermés au sens étroit chacun dans un intervalle I ou J. Par suite, on peut en trouver un nombre fini qui les contiennent tous au sens étroit $I_1, I_2, \ldots, I_p, J_1, \ldots, J_q$.

Les points qui ne sont pas intérieurs au sens étroit à l'un des intervalles J forment un ensemble G_1 intérieur à G et de mesure supérieure à $1-\eta$. Ils sont tous contenus dans $I_1, I_2, \ldots, I_p$, qu'on peut supposer sans point commun et compris entre 0 et 1, intervalles qui auront une longueur totale supérieure à $1-\eta$. Or, à chacun d'eux, I, correspond un nombre entier $n_1 > N$ tel que pour tout point de I, on ait

$$|r_{n_1}(x)| < \varepsilon.$$

Comme ε, η et N sont arbitraires, la série a une convergence quasi-uniforme en général, entre 0 et 1.

La résolution du problème que nous venons de traiter est bien plus simple si l'on se place au point de vue de M. Lebesgue.

Si l'on considère une série de fonctions bornées intégrables (L) *:* $u_1, u_2, \ldots,$ *dont la somme* $f(x)$ *est convergente entre* a *et* b*, cette somme supposée bornée est aussi intégrable* (L).

L'ensemble des points E tels que l'on ait

$$A \leq f(x) \leq B$$

est compris dans l'ensemble limite restreint F_p des ensembles E_n des points tels que

$$A - \frac{1}{p} < S_n(x) < B + \frac{1}{p},$$

p nombre entier fixe.

Cet ensemble F_p est mesurable et l'ensemble E est évidemment l'ensemble des points communs aux ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$. Donc E est mesurable quels que soient A et B; par conséquent, $f(x)$ est intégrable (L).

La proposition que nous venons de démontrer peut s'énoncer ainsi : *Toute fonction bornée* $f(x)$, *limite de fonctions bornées intégrables* (L) *est elle-même intégrable* (L). Sous cette forme,

---

[1] *Voir* par exemple Lebesgue, *Annali di Matematica*, 1902, p. 237.

elle nous fait connaître des champs de plus en plus étendus de fonctions intégrables (L); par exemple, toute fonction bornée limite de fonctions continues est intégrable (L).

Si une série de fonctions bornées intégrables (L) *est convergente de a à b et si l'on a* $|r_n(x)| < M$ *quels que soient l'entier n et l'abscisse x dans* (a, b), *la série des intégrales* (L) *des termes est aussi convergente et sa somme est l'intégrale* (L) *de* $f(x)$.

En effet, on a $f = S_n + R_n$; or il est facile de voir que la somme des intégrales (L) de deux fonctions est égale à l'intégrale (L) de leur somme. Donc

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx - (L)\int_a^b u_1\,dx - \ldots - (L)\int_a^b u_n\,dx = (L)\int_a^b r_n\,dx.$$

Or, puisque la série $u_1 + \ldots$ est convergente de a à b l'ensemble E des points tels que $|r_n(x)|$ soit supérieur à ε a une mesure σ_n qui tend vers zéro avec n. Et l'on a

$$\int_a^b r_n\,dx = \int_E r_n\,dx + \int_{C(E)} r_n\,dx,$$

d'où

$$\left|\int_a^b r_n\,dx\right| < M\sigma_n + \varepsilon(b - a),$$

M étant supérieur de a à b à la fonction bornée $|r_n(x)|$ quel que soit n. Comme on peut prendre ε et σ_n aussi petits que l'on veut lorsque n croît indéfiniment, la proposition est démontrée.

Dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer l'intervalle (a, b) par un ensemble mesurable quelconque E, la démonstration sera entièrement analogue.

Le théorème est encore vrai, si l'on prend l'intégrale de Riemann [1] au lieu de l'intégrale de M. Lebesgue, d'après notre remarque (p. 34), à condition que la somme de la série soit intégrable (R).

---

[1] Le cas où les fonctions f et f_n sont continues avait été déjà obtenu par M. Osgood (*American Journal*, 1894).

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR DES SÉRIES DE POLYNOMES.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE WEIERSTRASS.

Une fonction continue quelconque peut être représentée par une série de polynomes. Telle est la proposition fondamentale qui a été établie par Weierstrass ([1]). Diverses démonstrations en ont été données; elles peuvent toutes se ranger en deux catégories. Les unes, comme celles de Weierstrass et de MM. Picard ([2]), Lerch ([3]) et Volterra ([4]), font appel à des notions d'un caractère transcendant; les autres, comme celles de M. Lebesgue ([5]) et de M. Mittag-Leffler ([6]), sont d'une nature tout élémentaire et peuvent être rattachées à un important Mémoire de M. Runge ([7]).

Toutes les méthodes dont nous venons de parler conduisent au résultat suivant : *Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b), extrémités comprises, on peut trouver un polynome $P(x)$ tel que l'on ait dans tout cet intervalle :*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance, aussi petit que l'on veut.

([1]) WEIERSTRASS, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885.

([2]) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 258.

([3]) LERCH, *Rozpravy české Akademie* (2e classe) t. I, n° 33 (1892) et t. II, n° 9 (1893). Je ne connais ces Mémoires de M. Lerch que par la citation qu'il en fait lui-même dans son Mémoire : *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel* (*Acta Mathematica*, t. XXVII, p. 339), où se trouve aussi une démonstration du théorème de Weierstrass au moyen de séries trigonométriques.

([4]) VOLTERRA, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1897, p. 83.

([5]) LEBESGUE, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1898, p. 278.

([6]) MITTAG-LEFFLER, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1900.

([7]) RUNGE, *Acta mathematica*, 1885, p. 387.

Supposons, pour le moment, cette proposition établie et appelons $P_n(x)$ le polynome qui correspondrait à la valeur $\frac{1}{n^2}$ de ε. $P_n(x)$ sera la somme des n premiers termes de la série de polynomes :

$$(S) \qquad P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots.$$

Et l'on aura $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, *pour toutes les valeurs de* x *comprises dans l'intervalle* (a, b). *Donc la série* S *converge uniformément vers* $f(x)$ *dans cet intervalle.*

Elle converge même absolument dans cet intervalle, car on a

$$|P_n - P_{n+1}| < |P_n - f(x)| + |f(x) - P_{n+1}| < \frac{2}{n^2}.$$

Cherchons à étendre ce résultat au cas où l'intervalle que l'on considère comprend toute la droite.

Nous supposons que $f(x)$ soit continu pour toute valeur réelle de x. D'après ce qui précède, on pourra trouver un polynome $Q_n(x)$, tel que l'on ait *dans l'intervalle* $(-a_n, +b_n)$:

$$|f(x) - Q_n(x)| < \frac{1}{n^2},$$

a_n, b_n croissant indéfiniment avec n.
Alors la série

$$Q_1 + (Q_2 - Q_1) + (Q_3 - Q_2) + \ldots + (Q_n - Q_{n-1}) + \ldots$$

converge ABSOLUMENT *vers* $f(x)$ *pour toute valeur de* x.

Mais, en général, elle ne converge pas *uniformément* sur toute la droite. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle converge uniformément dans tout intervalle fini.

Méthode de Weierstrass. — La démonstration de Weierstrass est très simple et le principe en est utile dans bien d'autres questions. Elle repose sur le calcul bien connu de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

(Mais on pourrait refaire le raisonnement de Weierstrass avec une autre intégrale jouissant de propriétés analogues.) Cette intégrale a un sens et sa valeur est $\sqrt{\pi}$. Il en résulte, en particulier, que, étant

donné le nombre positif ω, on peut toujours trouver un nombre A tel que l'on ait

$$\int_a^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \omega$$

pour $a > A$.

Nous allons d'abord montrer que l'on a

$$f(x) = \lim_{k=0} \psi(x, k)$$

avec

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du,$$

k étant un nombre positif et $f(x)$ une fonction bornée et uniformément continue pour toutes les valeurs de x; nous désignerons par M sa limite supérieure.

En effet, soit h un nombre positif quelconque. On aura

$$k\sqrt{\pi}\,\psi(x, k) = \int_{x-h}^{x+h} + \int_{x+h}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{x-h}$$

ou, en posant $u = x + kt$,

$$\sqrt{\pi}\,\psi(x, k) = \int_{-\frac{h}{k}}^{+\frac{h}{k}} f(x+kt)\,e^{-t^2}\,dt$$
$$+ \int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} f(x+kt)\,e^{-t^2}\,dt + \int_{-\infty}^{-\frac{h}{k}} f(x+kt)\,e^{-t^2}\,dt.$$

La première intégrale peut s'écrire

$$f(x+h\theta_1) \int_{-\frac{h}{k}}^{+\frac{h}{k}} e^{-t^2}\,dt = f(x+h\theta_1)\left(\sqrt{\pi} - 2\int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right),$$

en désignant par θ_1 un nombre compris entre -1 et $+1$.

De même, on a

$$\int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} f(x+kt)\,e^{-t^2}\,dt = \theta_2 \mathrm{M} \int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,$$
$$\int_{-\infty}^{-\frac{h}{k}} f(x+kt)\,e^{-t^2}\,dt = \theta_3 \mathrm{M} \int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

avec $|\theta_2| < 1$, $|\theta_3| < 1$. Or, pour $\frac{h}{k} > A$, on a

$$\int_{\frac{h}{k}}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \omega$$

et, d'autre part, on a

$$|f(x+\theta_1 h) - f(x)| < \omega$$

pour $h < \alpha$.

En résumé, pour $h < \alpha$ et $k < \frac{h}{A}$, on a

$$\sqrt{\pi}\psi(x, k) = [f(x) + \theta\omega](\sqrt{\pi} - 2\theta'\omega) + 2\theta'' M\omega,$$

les nombres θ, θ', θ'' restant compris entre -1 et $+1$.

Ou

$$\psi(x, k) - f(x) = \left[\theta + \frac{2\theta'' M}{\sqrt{\pi}} - 2\theta' \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}} - 2\theta\theta'\omega\right]\omega$$

ou enfin, en supposant $\omega < 1$,

$$|\psi(x, k) - f(x)| < \left(3 + \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\right)\omega.$$

Le nombre α peut être déterminé indépendamment de x puisque $f(x)$ est uniformément continu pour toutes les valeurs de x. Par conséquent, si η désigne un nombre aussi petit que l'on veut, on peut trouver $\left(\text{en prenant } \omega = \frac{\eta}{3 + \frac{4M}{\sqrt{\pi}}}\right)$ un nombre α, tel que l'on ait

$$|\psi(x, k) - f(x)| < \eta,$$

quel que soit x, pourvu que l'on ait $k < \frac{\alpha}{A}$.

Autrement dit, $\psi(x, k)$ tend *uniformément* vers $f(x)$ lorsque k tend vers zéro.

Maintenant, considérons l'intégrale $\psi(x, k)$; je dis que c'est une fonction entière de x. En effet, posons $z = \xi + i\eta$, on aura

$$\psi(z, k) = \frac{e^{+\frac{\eta^2}{k^2}}}{k\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left[\cos \frac{2(u-\xi)\eta}{k^2}\right] e^{-\left(\frac{u-\xi}{k}\right)^2} du \right.$$
$$\left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left[\sin \frac{2(u-\xi)\eta}{k^2}\right] e^{-\left(\frac{u-\xi}{k}\right)^2} du \right\}.$$

Les deux intégrales sont celles qu'on obtient en remplaçant dans $\psi(x, k)$ la fonction $f(u)$ par la fonction

$$f(u)\cos\frac{2(u-\xi)\eta}{k} \qquad \text{ou} \qquad f(u)\sin\frac{2(u-\xi)\eta}{k}.$$

Ces deux dernières fonctions sont bornées et uniformément continues quel que soit u. Par conséquent, $\psi(z, k)$ est une fonction finie et bien déterminée de ξ et de η. On verrait facilement qu'il en est de même de ses dérivées en ξ et η qui vérifient les relations de Cauchy; en définitive, $\psi(z, k)$ est une fonction entière de z. Par suite, on peut écrire

$$\psi(x, k) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots,$$

les quantités $C_0 = \psi(0, k)$, $C_1 = \psi'(0, k)$, ... étant évidemment réelles avec k. Le second membre est une série uniformément convergente dans toute région finie du plan; donc on peut prendre un nombre n tel qu'en posant

$$P(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n,$$

on ait

$$|\psi(x, k) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute valeur de x comprise dans un intervalle quelconque *donné d'avance*. Et si l'on a pris, comme il est possible, k assez petit pour que l'on ait, quel que soit x entre les limites précédemment fixées,

$$|\psi(x, k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

on aura

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle donné.

Alors, soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b); si l'on prend pour $f(x)$ une fonction égale à $\varphi(x)$ entre a et b et égale à $\varphi(a)$ pour $x \leqq a$ et à $\varphi(b)$ pour $x \geqq b$, la fonction $f(x)$ sera bornée et uniformément continue quel que soit x. On pourra donc lui appliquer la méthode précédente et l'on aura un polynome $P(x)$, tel que

$$|P(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

entre a et b. Nous avons ainsi atteint notre but.

Si la fonction $f(x)$ est bornée et uniformément continue quel que soit x, la méthode même de Weierstrass permet de la représenter par une série de polynomes qui converge uniformément et absolument dans tout intervalle fini. C'est la série

$$P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots,$$

où l'on a, *quel que soit x entre $-n$ et $+n$* :

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n^2}.$$

AUTRES DÉMONSTRATIONS.

Vu l'importance du théorème fondamental, nous allons en faire connaître plusieurs démonstrations, à certains égards plus simples que celle de Weierstrass.

Nous ne donnerons pas la méthode de M. Picard (reposant sur l'emploi des séries trigonométriques), qui se trouve exposée dans son *Traité d'Analyse*.

Les méthodes que nous allons développer sont fondées sur l'emploi de lignes polygonales comme courbes approchées de la courbe continue $y = f(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction continue de a à b; on peut trouver un nombre δ, tel que l'inégalité $|x' - x''| < \delta$, entraîne

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Considérons une division de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels, tous plus petits que δ, séparés par les points

$$x_0 = a, \qquad x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}, \qquad x_n = b.$$

Puis inscrivons dans la courbe $y = f(x)$ une ligne polygonale dont les côtés se projettent sur Ox suivant ces intervalles. Cette ligne polygonale représentera une fonction continue $y = \varphi(x)$. La valeur de $\varphi(x)$ est égale à $f(x)$ aux points de division; lorsque x est compris dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i), $\varphi(x)$ est compris entre $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$ et $f(x)$ entre

$$f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4}$$

ou entre

$$f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad f(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dès lors, on a entre x_i et x_{i-1} :

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, comme ε est indépendant de l'intervalle partiel considéré, cette inégalité a lieu partout entre a et b. Il nous suffira maintenant de trouver un polynome $P(x)$ tel que l'on ait

$$|\varphi(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entre a et b, pour atteindre notre but qui est de vérifier par un polynome P l'inégalité

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Les méthodes que nous allons exposer ont précisément pour but de déterminer un polynome $P(x)$ tel que la courbe $y = P(x)$ approche autant que l'on veut d'une ligne polygonale donnée.

Méthode de M. Volterra. — On sait (¹) qu'une fonction périodique quelconque $g(x)$, (de période 2ω) peut être développée en série de Fourier

$$(1) \qquad g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{\omega} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\omega} \right]$$

qui converge uniformément quel que soit x, pourvu que cette fonction soit continue et qu'elle n'ait qu'un nombre fini de maxima et de minima dans un intervalle d'une période.

M. Volterra (²) applique ce résultat à la fonction $y = g(x)$ obtenue de la manière suivante. Soit $y = \varphi(x)$ l'équation de la ligne polygonale donnée qui n'est définie qu'entre a et b. On peut ajouter un côté à cette ligne polygonale de façon que les ordonnées des sommets extrêmes (en a par exemple et en c extérieur à ab) soient les mêmes. Ceci fait, nous prendrons pour fonc-

---

(¹) *Voir* par exemple : PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 224 et 239.

(²) *Voir* aussi LERCH, *Acta mathematica*, t. XXVII.

tion $g(x)$ la fonction telle que l'équation $y=g(x)$ représente la ligne polygonale que nous venons de former et toutes celles que l'on obtient à partir de celle-ci par une translation parallèle à Ox et égale à $n(c-a)$ (n entier positif ou négatif quelconque). La fonction $g(x)$ coïncidera avec $\varphi(x)$ entre a et b; elle sera de plus uniforme, continue et périodique. Soit $2\omega=(c-a)$, la période. On pourra appliquer la formule (1) et en particulier prendre p assez grand pour que l'on ait entre a et b

$$\left|g(x)-\left[a_0+\sum_{n=1}^{n=p}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\omega}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\omega}\right)\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Les expressions $\cos\dfrac{n\pi x}{\omega}$, $\sin\dfrac{n\pi x}{\omega}$ sont des fonctions entières de x; on peut donc prendre dans leurs développements suivant les puissances croissantes de x un nombre de termes assez grand pour que les polynomes obtenus en diffèrent aussi peu que l'on veut. Par conséquent, puisqu'il n'entre dans notre inégalité qu'un nombre fini p de ces expressions, on pourra trouver un polynome $P(x)$ tel que l'on ait,

$$\left|a_0+\sum_{n=1}^{n=p}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\omega}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\omega}\right)-P(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Et, puisque $g(x)=\varphi(x)$ entre a et b, on aura dans cet intervalle

$$|\varphi(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

Nous avons démontré en passant qu'on peut représenter une ligne polygonale (et par conséquent une fonction continue quelconque) au moyen d'une suite finie de Fourier

$$a_0+\sum_{n=1}^{n=p}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\omega}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\omega}\right],$$

avec une approximation donnée à l'avance dans un intervalle fini déterminé.

Méthodes élémentaires. — Soient

$$x_0=a,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{n-1},\quad x_n=b$$

les abscisses des sommets de la ligne polygonale $y = \varphi(x)$. $\varphi(x)$ est une certaine fonction continue et uniforme entre a et b, dont on peut écrire ainsi l'expression

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \sum_{i=1}^{i=n} [\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)] \alpha(x - x_i),$$

en désignant par $\varphi_i(x)$ la fonction du premier degré qui coïncide avec $\varphi(x)$ entre x_{i-1} et x_i et par $\alpha(x)$ une fonction égale à o pour $x > 0$, à 1 pour $x < 0$ et finie pour $x = 0$. On a

$$\varphi_i(x) = y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} [y_i - y_{i-1}]$$

Supposons que l'on ait pu former une fonction continue $\beta(x)$ qui approche de $\alpha(x)$ autant que l'on veut sauf peut-être pour $x = 0$ où elle reste finie. Alors la fonction continue $\psi(x)$ obtenue en remplaçant dans l'expression de $\varphi(x)$, $\alpha(x - x_i)$ par $\beta(x - x_i)$, différera aussi peu que l'on veut de $\varphi(x)$. Et si la fonction $\beta(x)$ a une forme analytique simple, il en sera de même de $\psi(x)$. Seulement, pour que ce raisonnement soit exact, il faudrait que l'on eût

$$|\alpha(x - x_i) - \beta(x - x_i)| < \varepsilon$$

(ε étant un nombre donné à l'avance), cette inégalité étant vérifiée quels que soient x et x_i dans tout l'intervalle (a, b), sauf peut-être pour $x = x_i$. C'est-à-dire que l'on ait

$$|\alpha(x) - \beta(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

dans l'intervalle fini $[-(b-a), (b-a)]$ sauf peut-être pour $x = 0$. Or ceci est impossible, puisque $\beta(x)$ est continue et que l'oscillation de $\alpha(x)$ est fixe et égale à 1. Mais il suffit que l'inégalité (1) ait lieu en dehors d'un certain intervalle $(-\eta, +\eta)$, qu'on puisse rendre aussi petit que l'on veut. En effet, si $|\varphi(x)| < M$ entre a et b, on aura, puisque la ligne polygonale a n côtés,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < 2nM\varepsilon,$$

en dehors des intervalles $(x_i - \eta, x_i + \eta)$. D'autre part, la fonction continue $\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)$ est nulle en x_i. On peut donc prendre η assez petit pour que l'on ait

$$|\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)| < \varepsilon,$$

dans l'intervalle $(x_i - \eta, x_i + \eta)$, et par conséquent, on aura, dans cet intervalle

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < N\varepsilon + 2nM\varepsilon,$$

en supposant $|\alpha(x) - \beta(x)| < N$ lorsque x varie entre $a - b$ et $b - a$.

On aura ainsi (en prenant ε et η assez petits, les nombres n, N, M étant fixes) une approximation aussi grande que l'on voudra dans tout l'intervalle.

M. Runge appliquait ces considérations en prenant pour $\beta(x)$ la fonction rationnelle

$$\beta(x) = \frac{1}{1 + (1 + x)^{2n}}$$

où n est un certain nombre entier. Cette fonction continue de x tend vers $\alpha(x)$ pour $0 \neq |x| < 1$, lorsque n croît indéfiniment. C'est-à-dire qu'en prenant n assez grand, on aura

$$|\alpha(x) - \beta(x)| < \varepsilon,$$

en dehors d'un certain intervalle $(-\eta, +\eta)$ (aussi petit que l'on veut quand n croît), et d'autre part $\beta(x)$ reste fini.

Dans le cas où $(b - a)$ ne serait pas inférieur à 1, on pourrait remplacer $\beta(x)$ par $\beta\left[\frac{x}{2(b-a)}\right]$, par exemple, pour ramener à ce cas.

En utilisant une fonction *rationnelle* continue pour $\beta(x)$, M. Runge montrait seulement qu'on peut trouver une fonction *rationnelle* continue aussi approchée que l'on veut d'une fonction continue donnée. Mais il a donné autre part ([1]) des méthodes, pour passer du cas de la fraction rationnelle à celui d'un polynome.

M. Mittag-Leffler a proposé de prendre pour la fonction $\beta(x)$ l'expression

$$\beta(x) = 1 - 2^{-(1-x)^n}.$$

Cette fonction est une fonction entière de x qui tend vers $\alpha(x)$ lorsque l'on a $0 \neq |x| < 1$. La fonction $\psi(x)$ obtenue en rem-

([1]) RUNGE, *Acta Matematica,* 1884, p. 236.

plaçant dans φ, $\alpha(x)$ par $\beta(x)$ si $(b-a)$ est inférieur à 1 et par $\beta\left[\frac{x}{2(b-a)}\right]$, par exemple, dans le cas contraire, sera une fonction *entière* approchée de φ. D'ailleurs, en prenant dans son développement un nombre de termes assez grand, on pourra la remplacer par un polynome.

On peut encore opérer ainsi : considérons l'expression

$$x[1-2\alpha(x)].$$

C'est une fonction *continue* (¹) de x, qui reste évidemment égale à la valeur absolue de x. A l'exemple de Cauchy, nous pourrons la désigner par $\sqrt{x^2}$. Pour avoir une fonction approchée de $\alpha(x)$, il suffit de l'obtenir pour $\sqrt{x^2}$. Or M. Lebesgue observe que l'on peut développer $\sqrt{x^2}$. On a

$$\sqrt{x^2} = (1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1.1}{2.4}z^2 + \frac{1.3.1}{2.4.6}z^3 - \ldots,$$

en posant $z = x^2 - 1$ et la série du second membre converge pour $|z| < 1$ (²). Elle converge même aussi pour $z = \pm 1$, par suite elle converge absolument et uniformément pour $-1 \leqq z \leqq 1$. Dès lors, la série en x obtenue en y remplaçant z par $x^2 - 1$ converge uniformément entre -1 et $+1$. Si donc, on prend un assez grand nombre de termes, on formera un polynome $P(x)$ tel que l'on ait

$$\left|\sqrt{x^2} - P(x)\right| < \varepsilon \quad \text{entre} \quad -1 \quad \text{et} \quad +1.$$

L'équation

$$y = P(x)$$

représente donc, à moins de ε près, *un angle droit dont les côtés sont limités;* à savoir la droite $y = -x$, dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 0$ et la droite $y = x$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. On en conclut immédiatement que, en choisissant convenablement les constantes m,

---

(¹) Le fait que cette fonction est *continue* rend la méthode de M. Lebesgue plus simple dans son principe que celle de M. Runge et de M. Mittag-Leffler.

(²) Il est assez curieux de remarquer que la formule précédente se trouve, à titre d'exercice sur les séries, dans le *Traité de calcul différentiel et intégral* de Joseph Bertrand. Mais Bertrand était très éloigné d'en déduire les conséquences qu'en a tirées M. Lebesgue.

n, p, q, r, l'équation

$$y = mx + n + p.\mathrm{P}(qx + r)$$

représentera, à moins de $p\varepsilon$ près, *un angle quelconque* à côtés limités. En ajoutant entre elles un nombre suffisant d'expressions de ce genre, on peut, par suite, représenter une ligne polygonale quelconque, à moins de ε' près, ε' étant donné d'avance.

On peut aussi, de la méthode de M. Lebesgue, déduire une expression de $\alpha(x)$, ce qui la rapproche de la méthode de M. Runge, mais en diminue la simplicité. On peut y arriver de bien des manières; la plus simple paraît être la suivante; on peut poser

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et remplacer $(x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par un développement analogue à celui de M. Lebesgue pour $(x^2)^{\frac{1}{2}}$; la multiplication de chaque terme par $\frac{x}{2}$ assure la convergence pour $x = 0$.

Nous ne développerons pas les méthodes de M. Painlevé, pour les fonctions réelles analytiques, qui se trouvent exposées dans la Note I.

EXTENSION AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Il y a lieu de faire une distinction entre les fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables et celles qui sont continues par rapport à chaque variable séparément.

L'ensemble des premières comprend l'ensemble des secondes; mais on peut former des exemples qui montrent que ces deux ensembles ne coïncident pas. Ainsi, prenons la fonction qui est égale à $\frac{xy}{x^2+y^2}$ lorsque x et y ne sont pas tous deux nuls et qui est nulle dans le cas contraire. Elle est évidemment continue par rapport à x et y séparément; cependant, elle ne tend pas vers 0, lorsque le point (x, y) tend vers l'origine sur la droite $x = y$.

Plus généralement, considérons la fonction nulle à l'origine et aux points de coordonnées rationnelles et qui, aux autres points,

est égale à

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty}\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} e^{-(p^2+q^2+r^2+s^2)} \frac{\left(x-\frac{p}{q}\right)\left(y-\frac{r}{s}\right)}{\left(x-\frac{p}{q}\right)^2+\left(y-\frac{r}{s}\right)^2}.$$

Elle est continue par rapport à x et y séparément et cependant elle est discontinue par rapport à l'ensemble des variables en une infinité de points dans un domaine aussi petit que l'on veut ([1]).

Nous ne nous occuperons que des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables.

Weierstrass avait donné dans son cours l'extension de son théorème en employant l'intégrale

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, k) = \left(\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \ldots, u_n) e^{-\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)^2-\cdots-\left(\frac{u_n-x_n}{k}\right)^2} du_1\ldots du_n.$$

M. Mittag-Leffler se sert des résultats acquis pour les fonctions d'une variable. Soit, par exemple, la fonction $z=f(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble des variables dans le domaine D

$$a \leqq x \leqq b, \qquad A \leqq y \leqq B.$$

Soient

$$x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b,$$

des nombres fixes, indépendants de y; on peut les choisir de façon que la ligne polygonale : $z=\varphi(x, Y)$ du plan $y=Y$, inscrite dans la courbe $z=f(x, Y)$ aux points d'abscisses x_i diffère aussi peu que l'on veut de celle-ci, l'*approximation* ε *restant indépendante de* Y *entre* A *et* B.

Or, d'après les méthodes que nous avons données, la fonction

$$\varphi(x, Y) \equiv \varphi_1(x, Y) + \sum_{i=1}^{i=n}[\varphi_{i+1}(x, Y)-\varphi_i(x, Y)]\alpha(x-x_i)$$

([1]) Cet exemple est une généralisation du précédent obtenue à l'aide du *principe de condensation des singularités. Voir* HÄNKEL, *Untersuchungen über die unendlich oft unstetigen und oscillirenden Functionen.* Tubingen, 1870.

peut être représentée par le polynome en x

$$\varphi(x, Y) = \varphi_1(x, Y) + \sum_{i=1}^{i=n} [\varphi_{i+1}(x, Y) - \varphi_i(x, Y)]\beta(x - x_i),$$

où $\beta(x)$ est un polynome tel que l'on ait

$$|\alpha(x) - \beta(x)| < \omega,$$

quel que soit x dans un certain intervalle.

Par conséquent $\varphi(x, Y)$ représente $f(x, Y)$ avec une approximation η indépendante de Y. Or le polynome en x, $\varphi(x, Y)$ a pour coefficients des fonctions continues de Y que l'on peut représenter avec telle approximation que l'on voudra. Par suite, *on peut trouver un polynome en x et en y qui diffère de $f(x, y)$ d'une quantité, constante dans* D *et qu'on peut prendre à l'avance aussi petite que l'on veut.*

M. Lebesgue généralise directement les méthodes élémentaires employées pour les fonctions d'une variable. Dans le cas d'une fonction de deux variables, par exemple, il remplace la surface $z = f(x, y)$ par une surface formée de morceaux de paraboloïdes.

Supposons que $f(x, y)$ soit continue par rapport à l'ensemble de ses variables, dans le domaine D

$$a \leqq x \leqq b, \qquad A \leqq y \leqq B.$$

On peut trouver un nombre δ tel que l'oscillation de f soit plus petite qu'une quantité positive donnée ε, lorsque le point (x, y) varie dans un rectangle de côté plus petit que δ.

Divisons le domaine D en rectangles de côtés plus petits que δ au moyen des droites

$$\begin{array}{llll} x = a = x_0, & x = x_1, & \ldots, & x = x_n = b, \\ y = A = y_0, & y = y_1, & \ldots, & y = y_p = B, \end{array}$$

et soit $z_{i,k}$ la valeur de $f(x_i, y_k)$. Désignons de plus par $z = \varphi_{i,k}(x, y)$ l'équation du paraboloïde qui passe par le quadrilatère ayant pour sommets les points de la surface $z = f(x, y)$.

qui se projettent aux points

$$(x_i, y_k), \quad (x_{i+1}, y_k), \quad (x_i, y_{k+1}), \quad (x_{i+1}, y_{k+1}).$$

Ces projections sont les sommets d'un rectangle $C_{i,k}$ dans lequel on a

$$|\varphi_{i,k}(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Car les cotes des points du paraboloïde sont comprises entre la plus grande et la plus petite des valeurs $z_{i,k}$, $z_{i+1,k}$, $z_{i,k+1}$, $z_{i+1,k+1}$ lesquelles diffèrent entre elles de moins de ε.

Si $\varphi(x, y)$ est la fonction qui coïncide avec $\varphi_{i,k}(x, y)$ dans le carré $C_{i,k}$ ($i = 0, \ldots, n-1$; $k = 0, \ldots, p-1$), on aura dans tout le domaine D

$$|\varphi(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Nous sommes donc ramenés à trouver un polynome qui approche de $\varphi(x, y)$, Or, on peut remarquer que l'équation

$$z = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} + x\sqrt{y^2} + y\sqrt{x^2} + xy$$

représente *zéro* si l'une au moins des variables x ou y est négative, et un morceau de paraboloïde si x et y sont positifs; or on peut, suivant la méthode de M. Lebesgue, avoir de cette expression un développement approché pour les valeurs de x et y dont la valeur absolue est inférieure à un. En effectuant une transformation linéaire sur x, y et z séparément, on peut obtenir, à moins de ε près, un morceau quelconque de paraboloïde et, en ajoutant un nombre limité d'expressions de ce genre, on obtient $\varphi(x, y)$ avec une approximation donnée d'avance.

On pourrait aussi observer que l'équation de la surface

$$z = \varphi(x, y)$$

peut s'écrire

$$z = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=0}^{k=p-1} [\alpha(x - x_{i+1}) - \alpha(x - x_i)] \times [\alpha(y - y_{k+1}) - \alpha(y - y_k)] \varphi_{i,k}(x, y).$$

Car le produit des deux crochets est égal à 1 dans le carré C_{ik} et nul en dehors, si l'on désigne comme auparavant par $\alpha(x)$ une fonction de x nulle pour $x > 0$ et égale à 1 pour $x < 0$.

Or $\varphi_{i,k}(x, y)$ est un polynome qui est du premier degré séparément par rapport à x et par rapport à y. Par suite, un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour le cas d'une variable nous montre que nous aurons un polynome approché de $\varphi(x, y)$ en remplaçant $\alpha(x)$ par un polynome $\beta(x)$ approché en dehors d'un intervalle $-\eta$, $+\eta$ aussi petit que l'on veut.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la fonction $f(x, y)$ définie et continue dans un certain rectangle. Si, au lieu d'un rectangle, on avait un domaine fermé D, d'un seul tenant ou non, il suffirait de remplacer la fonction f par une fonction continue dans un rectangle contenant D et qui coïncide avec f dans D. Cela est évidemment possible d'une infinité de manières.

On voit donc qu'*on peut représenter toute fonction, continue par rapport à l'ensemble de ses variables dans un domaine* D *fermé, par une série de polynomes qui converge uniformément et absolument dans* D.

Une conséquence immédiate du théorème de Weierstrass est la suivante : *Étant donnée une série de fonctions continues,*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots,$$

convergente dans un intervalle (a, b), *on peut toujours mettre* $f(x)$ *sous la forme d'une série de polynomes qui converge dans le même intervalle. Et si la première série est uniformément convergente, on pourra supposer qu'il en est ainsi pour la série de polynomes* (¹).

En effet, quel que soit p on pourra former un polynome Q_p tel que l'on ait

$$|Q_p(x) - S_p(x)| < \frac{1}{p}$$

entre a et b. Par conséquent, $Q_p(x)$ tend vers la limite $f(x)$ de $S_p(x)$ lorque p croît indéfiniment (quel que soit x entre a et b). Par suite, la série de polynomes

$$Q_1 + (Q_2 - Q_1) + \ldots + (Q_n - Q_{n-1}) + \ldots$$

converge vers $f(x)$ entre a et b. Elle y converge uniformément

(¹) La généralisation au cas de n variables est immédiate.

s'il en est ainsi pour la série donnée; car on aura entre a et b

$$|f(x) - Q_p(x)| \leqq |f(x) - S_p(x)| + |S_p(x) - Q_p(x)| < \varepsilon,$$

en prenant p assez grand.

On sait d'ailleurs que, étant donnée une série uniformément convergente, on peut toujours, en groupant convenablement les termes, la transformer en une série *absolument et uniformément convergente* [1]. On pourra donc s'arranger pour que la série de polynomes converge absolument et uniformément.

Lorsqu'on cherche un polynome approchant d'une fonction continue déterminée, il y a intérêt à obtenir, pour une approximation donnée, le polynome le plus simple possible, par exemple du plus petit degré. Mais le résultat dépendra évidemment de la plus ou moins grande continuité de la fonction donnée $f(x)$.

Ainsi, lorsqu'on remplacera la courbe $y = f(x)$ par la ligne polygonale $y = \varphi(x)$, il faudra, si l'on veut avoir une approximation ε, découper l'intervalle (a, b) en intervalles de longueurs plus petites que δ, δ étant tel que l'inégalité

$$|x' - x''| \leqq \delta$$

entraîne

$$|f(x') - f(x'')| \leqq \varepsilon$$

entre a et b. Pour une valeur déterminée de ε, on peut prendre pour δ la plus petite valeur possible. On déterminera ainsi une fonction $\delta = \varphi(\varepsilon)$ qui tend vers zéro avec ε. Et l'on voit que la ligne polygonale sera d'autant plus simple pour une valeur donnée de ε que la fonction $\varphi(\varepsilon)$ décroîtra plus vite avec ε. On peut dire que la décroissance de $\varphi(\varepsilon)$ près de $\varepsilon = 0$ mesure la continuité de $f(x)$ entre a et b. Ainsi, par exemple, si la fonction est dérivable entre a et b et si sa dérivée est bornée, on a $\varphi(\varepsilon) \leqq A\varepsilon$, A étant un nombre positif fixe.

Représentation des fonctions dérivables.

En particulier, considérons une fonction $f(x)$ qui ait une dérivée f'_x *continue* entre a et b. On peut se demander s'il est

[1] *Voir*, par exemple, Borel, *Acta Mathematica*, t. XXIV, p. 355.

possible de la représenter par une série de polynomes telle que cette série et la série des dérivées convergent uniformément vers $f(x)$ et $f'(x)$ entre a et b. La réponse est affirmative (Painlevé, *Comptes rendus*, 7 février 1898). En effet, on pourra trouver un polynome $Q_n(x)$, tel que l'on ait

$$|f'(x) - Q_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Mais alors, on aura

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{(b-a)}{n}$$

en posant

$$P_n(x) = \int_a^x Q_n(x)\,dx + f(a).$$

Par suite, on a

$$Q_n(x) = P'_n(x)$$

et les deux séries

$$P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots,$$
$$P'_1 + (P'_2 - P'_1) + \ldots + (P'_n - P'_{n-1}) + \ldots,$$

convergent absolument et uniformément vers $f(x)$ et f'_x entre a et b.

Cette méthode s'étend immédiatement au cas où la fonction admet des dérivées continues jusqu'à un ordre fini déterminé.

Supposons même qu'elle admette des dérivées de tous les ordres.

On déterminera pour chaque valeur de n un polynome $Q_n(x)$ tel que l'on ait entre a et b

$$|f^{(n)}(x) - Q_n(x)| < \varepsilon_n.$$

Puis, en choisissant convenablement les constantes d'intégration, on pourra former un polynome $P_n(x)$ dont $Q_n(x)$ soit la dérivée d'ordre n et tel que

$$|f^{(p)}(x) - P_n^{(p)}(x)| < \varepsilon_n (b-a)^{n-p} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n).$$

Si par exemple $(b-a)$ est supérieur à 1, on pourra prendre

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n(b-a)^n}$$

et alors la série cherchée sera

$$P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots.$$

Car cette série (ainsi que toutes les séries des dérivées) est une série de polynomes qui converge uniformément et absolument entre a et b vers $f(x)$ [ou vers les dérivées correspondantes de $f(x)$].

L'inconvénient d'un tel développement est de ne pas mettre en évidence les propriétés de dérivabilité de $f(x)$. Car on ne connaît pas les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série de polynomes puisse être dérivée terme à terme.

C'est pourquoi nous allons donner un développement en série de fonctions transcendantes simples qui ne présente pas l'inconvénient indiqué.

Étant donnée une fonction $f(x)$ qui admet des dérivées continues de tous les ordres entre -1 et $+1$, on peut la représenter par un développement en série tel que

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{k=+\infty} (A_k x^k + B_k \cos k\pi x + C_k \sin k\pi x)$$

et les dérivées de $f(x)$ seront représentées par les séries des dérivées correspondantes des termes de cette série. Toutes les séries ainsi obtenues convergent uniformément entre -1 et $+1$.

Remarquons d'abord que, étant donné *a priori* un développement de la forme (2), on connaît la condition nécessaire et suffisante pour qu'il converge entre -1 et $+1$ ainsi que toutes les séries des dérivées.

En effet, si la série des dérivées $m^{\text{ième}}$

$$\sum \Big[k(k-1)\ldots(k-m+1)A_k x^m + B_k (k\pi)^m \cos\left(k\pi x + m\frac{\pi}{2}\right) + C_k (k\pi)^m \sin\left(k\pi x + m\frac{\pi}{2}\right)\Big]$$

converge entre -1 et $+1$, elle converge en particulier pour $x = 0$.

Or, en prenant par exemple $m = 2n$, on voit que le terme gé-

néral se réduit à $(-1)^n B_k(k\pi)^{2n}$ pour $x = 0$. Par conséquent, $B_k k^{2n}$ tend vers zéro lorsque k croît indéfiniment, quel que soit x; alors il en est de même pour $B_k k^m$ quel que soit l'entier m.

De même, en considérant le terme général pour

$$x = 0, \qquad m = 2n + 1,$$

on est amené à conclure que $C_k k^m$ tend vers zéro quel que soit m.

Dès lors la série

$$\psi(x) = \sum \left[B_k (k\pi)^m \cos\left(k\pi x + m\frac{\pi}{2}\right) + C_k (k\pi)^m \sin\left(k\pi x + m\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

est uniformément convergente quel que soit x. Il faut donc que la série restante soit convergente entre -1 et $+1$ et par suite que $A_k k^m$ tende vers zéro quel que soit m.

Il est donc nécessaire que les expressions $A_k k^m$, $B_k k^m$, $C_k k^m$ tendent vers zéro, quel que soit m, pour que la série considérée soit convergente entre -1 et $+1$. Cette condition est d'ailleurs suffisante et, si elle est vérifiée, la série est la somme d'une fonction périodique de période égale à 2 et d'une fonction holomorphe entre -1 et $+1$.

Démontrons maintenant le théorème que nous avions en vue ([1]). Pour cela, observons que le cas où $f(x)$ serait une fonction indéfiniment dérivable et *périodique* (de période égale à 2) se traite immédiatement. En effet, $f(x)$ étant continue, périodique et indéfiniment dérivable peut se développer en série de Fourier

$$f(x) = \Sigma (B_k \cos k\pi x + C_k \sin k\pi x),$$

uniformément convergente quel que soit x. On sait de plus que ses dérivées peuvent être représentées respectivement par les séries uniformément convergentes composées des dérivées des termes du second membre.

Supposons que la fonction $f(x)$, sans être périodique, sans même être nécessairement définie en dehors de l'intervalle

---

([1]) *Voir* E. Borel, *Thèse*, page 29. Il est à peine utile de faire observer qu'on passe immédiatement au cas d'un intervalle quelconque par un simple changement de variable. Pour l'extension au cas de deux variables, *voir* E. Borel, *Sur les fonctions de deux variables réelles* (*Annales de l'École Normale*, 1896).

$(-1, +1)$, soit telle que l'on ait

$$f(-1)=f(+1), \qquad f^{(p)}(-1)=f^{(p)}(+1),$$

quel que soit p, en appelant $f^{(p)}(-1)$ la dérivée d'ordre p *à droite* de -1 et $f^{(p)}(+1)$ la dérivée d'ordre p *à gauche* de $+1$.

Dans ces conditions, nous pourrons former une fonction périodique $\varphi(x)$, de période égale à 2, qui coïncide avec $f(x)$ entre -1 et $+1$ et qui est partout indéfiniment dérivable. Alors on pourra répéter ce qui précède sur la fonction $\varphi(x)$ quel que soit x et ce sera vrai en particulier pour $f(x)$ *entre* -1 *et* $+1$.

Pour arriver maintenant au cas général, il nous suffira de montrer qu'on peut retrancher d'une fonction $f(x)$ (supposée seulement dérivable à l'infini entre -1 et $+1$) une série

$$\chi(x) = \Sigma A_k x^k,$$

uniformément convergente entre -1 et $+1$ ainsi que toutes ses dérivées, de façon que la différence

$$\psi(x)=f(x)-\chi(x)$$

satisfasse aux égalités

$$\psi^{(p)}(-1)=\psi^{(p)}(+1)$$

quel que soit p.

Il faut pour cela que l'on ait l'égalité

$$\chi^{(p)}(+1)-\chi^{(p)}(-1)=f^{(p)}(+1)-f^{(p)}(-1),$$

où le second membre est une constante connue C_p.

Pour déterminer la fonction $\chi(x)$ par ces égalités, écrivons-la sous la forme

$$\chi(x)=G(x^2)+xH(x^2).$$

On aura en dérivant successivement cette égalité

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} 2H(1)=C_0,\\ 4G'(1)=C_1,\\ 8H''(1)=C_2-12H'(1),\\ \dots\dots\dots\dots,\\ 2^{2p+1}H^{(2p)}(1)=C_{2p}+\text{une fonction de } H'(1), H'''(1), \dots, H^{(2p-1)}(1),\\ 2^{2p+2}G^{(2p+1)}(1)=C_{2p+1}+\text{une fonction de } G(1), G''(1), \dots, G^{(2p)}(1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Par suite, si l'on se donne arbitrairement pour $t=1$ les dérivées

d'ordre pair de $G(t)$ et celles d'ordre impair de $H(t)$, les autres seront déterminées successivement et d'une seule façon par ces égalités. En résumé, on peut trouver une infinité de systèmes de solutions des équations (3) :

$$G(1) = g_0, \quad G'(1) = g_1, \quad \ldots, \quad G^{(p)}(1) = g_p, \quad \ldots,$$
$$H(1) = h_0, \quad H'(1) = h_1, \quad \ldots, \quad H^{(p)}(1) = h_p, \quad \ldots.$$

Il s'agit maintenant de déterminer les fonctions G et H au moyen de ces égalités. Considérons, par exemple, les équations relatives à la fonction G : le problème sera résolu si la série

$$(4) \qquad \sum_{p=1}^{p=+\infty} g_p \frac{(t-1)^p}{p!}$$

est convergente dans un cercle de rayon supérieur à 2. En effet, on pourra la développer à l'origine en une série de Mac-Laurin : $\sum \alpha_n t^n$ dont le rayon de convergence sera supérieur à 1. Alors la fonction $\sum \alpha_n x^{2n}$ sera bien une fonction $G(x^2)$ *uniformément convergente entre* -1 *et* $+1$ et telle que $G^{(p)}(1) = g_p$.

Mais, dans le cas général, non seulement la série (4) n'aura pas un rayon de convergence supérieur à 2, mais il arrivera que ce rayon sera *nul*, la fonction $G(x^2)$ n'étant pas régulière au point $+1$.

Pour traiter ce cas, nous ferons voir qu'il suffit de vérifier nos égalités *avec une certaine approximation* pour pouvoir résoudre le problème. En effet, supposons qu'on ait trouvé une fonction $U(t) = \sum u_n \frac{t^n}{n!}$ dont le rayon de convergence soit supérieur ou égal à un et telle que l'on ait, non pas $U^{(p)}(1) = g_p$, mais simplement

$$|U^{(p)}(1) - g_p| < A,$$

A étant un nombre fixe indépendant de t. Alors, posons

$$l_p = g_p - U^{(p)}(1)$$

et considérons la série

$$L(t) = \sum l_p \frac{(t-1)^p}{p!}.$$

Puisque $|l_p| < A$, cette série est une fonction entière de t et, par conséquent, la fonction analytique $U(t) + L(t)$ a un rayon de convergence au point $t = 0$ supérieur ou égal à 1; d'autre part, on aura évidemment

$$U^{(p)}(1) + L^{(p)}(1) = g_p;$$

par suite, on peut prendre pour G la fonction $U + L$.

Il s'agit donc de résoudre le système d'inégalités du premier degré en nombre infini avec une infinité d'inconnues

$$\begin{gathered}
|u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots - g_0| < A, \\
|u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n + \ldots - g_1| < A, \\
|2u_2 + 6u_3 + \ldots + n(n-1)u_n + \ldots - g_2| < A, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Pour cela, considérons une série *divergente* à termes positifs décroissants

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

telle que x_n reste inférieur à un nombre fixe B et que la série

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n} + \ldots$$

soit convergente. $\left(\text{On pourrait prendre, par exemple, la série harmonique } x_n = \frac{1}{n}.\right)$

D'après nos hypothèses sur les x_i, il sera possible de trouver un entier $n_0 \geqq 0$, tel que l'on ait

$$\big|x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0} - |g_0|\big| < B.$$

Prenons alors $|u_0| = x_0, \ldots, |u_{n_0}| = x_{n_0}$, les signes des quantités $u_0, \ldots, u_{n_0}$ étant identiques à celui de g_0.

On aura

$$|u_0 + \ldots + u_{n_0} - g_0| < B.$$

Déterminons ensuite un nombre $n_1 \geqq n_0 + 1$ tel que l'on ait

$$\big|x_{n_0+1} + \ldots + x_{n_1} - |g'_1|\big| < B,$$

en posant

$$g'_1 = g_1 - u_1 - 2u_2 - \ldots - n_0 u_{n_0}.$$

Nous prendrons

$$(n_0+1)|u_{n_0+1}| = x_{n_0+1}, \quad \ldots, \quad n_1|u_{n_1}| = x_{n_1},$$

les signes des u étant celui de g'_1; on aura donc

$$|(n_0+1)u_{n_0+1}+\ldots+n_1 u_{n_1} - g'_1| < \mathrm{B}.$$

Et ainsi de suite; ayant déterminé $u_0, \ldots, u_{n_p}$, on déterminera un nombre $n_{p+1} \geqq n_p + 1$, tel que l'on ait

$$\left|x_{n_p+1}+\ldots+x_{n_{p+1}} - |g'_{p+1}|\right| < \mathrm{B},$$

avec

$$g'_{p+1} = g_p - p!\,u_p - \ldots - n_p(n_p-1)\ldots(n_p-p+1)u_{n_p}.$$

Et l'on prendra

$$(n_p+1)\ldots(n_p-p+2)|u_{n_p+1}| = x_{n_p+1}, \quad \ldots,$$
$$n_{p+1}\ldots(n_{p+1}-p+1)|u_{n_{p+1}}| = x_{n_{p+1}}$$

(ce qui est possible, car n_p est supérieur ou égal à $p+1$), en choisissant le signe de g'_{p+1} pour signe de $u_{n_p+1}, \ldots, u_{n_{p+1}}$.

D'où

$$|(n_p+1)\ldots(n_p-p+2)u_{n_p+1}+\ldots$$
$$+ n_{p+1}\ldots(n_{p+1}-p+1)u_{n_{p+1}} - g'_{p+1}| < \mathrm{B}.$$

En opérant ainsi indéfiniment, on déterminera tous les u.

Or, on aura, en supposant $|\theta| \leqq 1$,

$$u_0+u_1+\ldots-g_0 = u_0+\ldots+u_{n_0}-g_0$$
$$+\theta\left[\frac{x_{n_0+1}}{n_0+1}+\ldots+\frac{x_{n_1}}{n_1}+\frac{x_{n_1+1}}{n_1(n_1+1)}+\ldots\right].$$

La quantité entre crochets est plus petite que la somme de la série convergente $\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots$.

Par suite, la valeur absolue du premier membre est inférieure à $\mathrm{B}+\mathrm{S}$.

De même, on a en général, avec $|\theta_p| \leqq 1$,

$$p!\,u_p + \frac{(p+1)!}{1!}u_{p+1}+\ldots-g_p = (n_p+1)\ldots(n_p-p+2)u_{n_p+1}+\ldots$$
$$+ n_{p+1}\ldots(n_{p+1}-p+1)u_{n_{p+1}}$$
$$- g'_{p+1} + \theta_p\left[\frac{x_{n_{p+1}+1}}{n_{p+1}-p+1}+\ldots\right].$$

Comme les x_i vont en décroissant, la quantité entre crochets est inférieure à la somme des termes de la série $\sum \frac{x_n}{n}$ à partir du terme de rang $n_{p+1} - p + 1$, et par conséquent inférieure à S.

Le premier membre est donc inférieur en valeur absolue à $B + S$ quel que soit p : nous avons bien un système de solution de nos inégalités (en prenant pour A le nombre $B + S$). Le théorème est ainsi établi. La démonstration prouve, d'ailleurs, que l'on pourra former une infinité de développements de la même espèce que celui que nous avions en vue.

MÉTHODES D'INTERPOLATION.

Formule d'interpolation de Lagrange. — Considérons une fonction $f(x)$ dont on connaît les valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour les abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La formule de Lagrange permet de déterminer un polynome de degré $n - 1$ qui prend les mêmes valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

On serait tenté de croire que le polynome $P(x)$ sera d'autant plus approché de $f(x)$ que n est plus grand; car n est le nombre de points communs aux deux courbes $y = f(x)$ et $y = P(x)$. En fait, c'est ce qu'on suppose souvent en Physique, lorsqu'on exprime approximativement la loi d'un phénomène au moyen d'un nombre fini d'expériences par une relation de la forme $y = P(x)$ où $P(x)$ est un polynome (par exemple dans l'étude des dilatations).

Si cette méthode était rigoureuse, on aurait là un nouveau moyen de développer une fonction en série de polynomes, et par un procédé très simple. Car $P(x)$ est de la forme $\sum_i c_i R_i(x)$ où les polynomes $R_i(x)$ sont indépendants de la fonction $f(x)$ considérée et peuvent être calculés une fois pour toutes.

Il y a donc lieu de rechercher si l'approximation augmente avec n. Nous allons donner un exemple où c'est le contraire qui a lieu.

Nous montrerons ainsi que la formule d'interpolation de Lagrange ne peut pas conduire au théorème de Weierstrass (¹).

Considérons d'abord une fonction qui soit nulle aux points d'abscisses

$$-1,\quad \frac{-(m-1)}{m},\quad \frac{-(m-2)}{m},\quad \ldots,\quad 0,\quad \frac{1}{m},\quad \frac{3}{m},\quad \frac{4}{m},\quad \ldots,\quad 1,$$

et qui soit égale à $\frac{1}{m}$ pour l'abscisse $\frac{2}{m}$. La formule d'interpolation de Lagrange fournira un polynome $P_m(x)$ prenant les mêmes valeurs aux mêmes points

$$P_m(x) = \frac{1}{m}\,\frac{(x+1)\left(x+\frac{m-1}{m}\right)\cdots x.\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(x-\frac{3}{m}\right)\left(x-\frac{4}{m}\right)\cdots(x-1)}{\left(\frac{2}{m}+1\right)\left(\frac{2}{m}+\frac{m-1}{m}\right)\cdots\frac{2}{m}\cdot\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}-\frac{3}{m}\right)\left(\frac{2}{m}-\frac{4}{m}\right)\cdots\left(\frac{2}{m}-1\right)}.$$

Supposons maintenant que m soit impair : $m = 2q+1$. Quel que soit l'entier q, le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ sera le milieu de l'un des $2m$ intervalles égaux séparés par les points d'abscisses

$$-1,\quad -\left(\frac{m-1}{m}\right),\quad \ldots,\quad 0,\quad \frac{1}{m},\quad \frac{2}{m},\quad \ldots,\quad 1.$$

Considérons alors le polynome $P_m(x)$ sans nous préoccuper

(¹) Cet important résultat, que je croyais nouveau lorsque je l'ai donné dans mon Cours, avait été obtenu antérieurement par M. Runge. J'ai eu connaissance des travaux de M. Runge sur ce sujet par une communication que M. Mittag-Leffler a bien voulu me faire, au 3ᵉ Congrès international des Mathématiciens à Heidelberg, le 9 août 1904. M. Mittag-Leffler m'a appris de plus que, pour donner aux beaux travaux de M. Runge sur ce sujet une publicité en rapport avec leur importance, il en publierait prochainement une traduction française dans les *Acta Mathematica*. Le Mémoire original de M. Runge : *Ueber empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten*, a paru dans la *Zeitschrift für Math. und Physik* (t. XLVI, 1901, p. 229). M. Runge a exposé une partie de ses résultats dans un Livre à l'usage des ingénieurs : *Theorie und Praxis der Reihen* (*Sammlung Schubert*, Göschen'sche Verlagsbuchhandlung, Leipzig, 1904). Parmi les beaux résultats obtenus par M. Runge, je citerai seulement le suivant : si l'on calcule la formule de Lagrange, pour la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ dans l'intervalle -5, $+5$, on obtient un résultat qui converge dans l'intervalle compris entre $\pm 3,63$, *mais qui diverge en dehors de cet intervalle*. On voit que cet exemple est bien plus simple que celui du texte. Je crois devoir cependant maintenir ce dernier, car le mode de démonstration employé me paraît de nature à pouvoir rendre des services dans bien des questions analogues.

pour le moment de la fonction qui lui a donné naissance. Nous allons montrer qu'on peut déterminer un nombre k tel que l'inégalité $m > k$ entraîne

$$\left|P_m\left(\frac{1}{2}\right)\right| > A,$$

A étant une quantité quelconque donnée à l'avance ([1]).

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\left|P_m\left(\frac{1}{2}\right)\right|\\ &= \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} \times \left[\frac{3.5\ldots m}{2.4\ldots(m-1)}\right]^2 \times \frac{(m+2)(m+4)\ldots(2m+1)}{(m+1)(m+3)\ldots 2m}\\ &\quad\times \frac{1}{m(m-2)(3m+1)} \times \frac{2m+3}{m+1}\cdot\frac{2m+5}{m+3}\cdots\frac{3m+2}{2m}.\end{aligned}$$

La première ligne du second membre est supérieure à $\frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}$ qui tend vers 1 lorsque m croît indéfiniment. Par conséquent elle sera supérieure à $\frac{1}{2}$ pour $m > h$, si h est assez grand. D'autre part, on a

$$\frac{2m+3}{m+1} > \frac{2m+5}{m+5} > \ldots > \frac{3m+2}{2m} > \frac{3}{2}.$$

Par suite, on a pour $m > h$

$$\left|P_m\left(\frac{1}{2}\right)\right| > \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^m}{m(m-2)(3m+1)}.$$

Le second membre croît indéfiniment avec m; on pourra donc déterminer $k > h$, tel que l'inégalité $m > k$ entraîne

$$\left|P_m\left(\frac{1}{2}\right)\right| > A.$$

Ceci étant, considérons une suite de courbes C_1, C_2, C_3, ..., définies de la façon suivante. La courbe C_p est une courbe con-

---

([1]) Nous avons pris le point $\frac{1}{2}$ pour simplifier, on pourrait raisonner de la même manière sur le point d'abscisse $\frac{1}{2n}$, n étant un entier quelconque fixe.

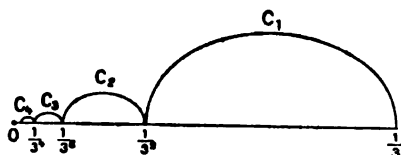
tinue qui coïncide avec Ox en dehors de l'intervalle $\left(\frac{1}{3^{p+1}}, \frac{1}{3^p}\right)$ et qui a un maximum égal à $\frac{1}{3^{p+1}}$ au milieu de cet intervalle.

On pourrait prendre, *par exemple*, dans cet intervalle, la courbe

$$y = \frac{1}{3^{p+1}} \sin 3^{p+1} \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{3^{p+1}}\right).$$

Nous allons, à l'aide des courbes C_p, définir une courbe Γ; nous appellerons $\Pi_{p,\Gamma}(x)$ le polynome de Lagrange qui prend les

Fig. 1.



mêmes valeurs que les ordonnées de la courbe Γ aux points d'abscisses ([1]) :

$$-1, \quad -\frac{(3^p - 1)}{3^p}, \quad -\frac{(3^p - 2)}{3^p}, \quad \ldots, \quad \frac{3^p - 1}{3^p}, \quad 1.$$

Je vais montrer qu'on peut trouver une courbe Γ continue entre -1 et $+1$, telle que la courbe $y = \Pi_{p,\Gamma}(x)$ n'ait pas pour limite Γ lorsque p croît indéfiniment. Cela prouvera bien que la formule d'interpolation de Lagrange ne donne pas une approximation croissant avec le degré du polynome employé.

Il suffit de montrer que l'on peut choisir Γ de manière que $\Pi_{p,\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne tende pas vers le point de Γ d'abscisse $\frac{1}{2}$. Or, remarquons que l'on a

$$\Pi_{p,C_{p-1}}(x) = P_{3^p}(x)$$

en employant les notations précédentes. On peut donc prendre un nombre h_1 de façon que l'on ait

$$\left|\Pi_{p,C_{p-1}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 2A \qquad \text{pour } p - 1 \geqq h_1.$$

([1]) On aurait un raisonnement analogue en divisant le segment $-1, +1$ en intervalles de longueurs $(2q+1)^p$, q étant un entier quelconque fixe.

Deux cas pourront alors se présenter : ou bien $\Pi_{p,C_{h_1}}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne tend pas vers zéro $\left(\text{ordonnée de } C_1, C_2, \ldots, \text{pour } x = \frac{1}{2}\right)$, lorsque ($h_1$ restant fixe) p croît indéfiniment et alors la proposition est démontrée en prenant pour Γ la courbe C_{h_1}; ou bien alors on peut déterminer un nombre r_1 tel que l'on ait

$$\left|\Pi_{p,C_{h_1}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{A}{2} \qquad \text{pour } p > r_1.$$

Soit maintenant h_2 un nombre entier supérieur à h_1 et r_1. Considérons la courbe $C'_{2,p}$ formée des sinusoïdes qui figurent dans C_{h_1} et C_{p-1} ($p - 1 \geqq h_2$) et de l'axe Ox dans le reste de l'intervalle $(-1, +1)$. La courbe $C'_{2,p}$ sera continue; son ordonnée en $x = \frac{1}{2}$ sera nulle et l'on aura

$$\Pi_{p,C'_{2,p}} = \Pi_{p,C_{h_1}} + \Pi_{p,C_{p-1}}.$$

D'ailleurs, on a

$$\left|\Pi_{p,C_{h_1}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{A}{2},$$

puisque

$$p > h_2 > r_1$$

et

$$\left|\Pi_{p,C_{p-1}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 2A,$$

puisque

$$p - 1 \geqq h_2 > h_1.$$

Donc

$$\left|\Pi_{p,C'_{2,p}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 2A - \frac{A}{2}$$

pour $p - 1 \geqq h_2$.

Deux cas pourront alors se présenter : ou bien $\Pi_{p,C'_{2,h_2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne tend pas vers zéro lorsque p croît indéfiniment et alors le théorème est démontré en prenant pour Γ la courbe C'_{2,h_2}, ou bien on pourra déterminer un nombre r_2 tel que l'on ait

$$\left|\Pi_{p,C'_{2,h_2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{A}{2^2} \qquad \text{pour } p > r_2.$$

On prendra alors un nombre h_3 supérieur à h_2 et r_2, et l'on formera une courbe $C'_{3,p}$ formée des sinusoïdes qui figurent dans C_{h_1},

C_{h_2} et C_{p-1}, ($p - 1 \geqq h_3$) et qui coïncide avec Ox dans le reste de l'intervalle. Et l'on recommencera sur $C'_{3,p}$ le même raisonnement que sur $C'_{2,p}$. Alors, on voit que deux cas pourront se présenter. Ou bien, au bout d'un nombre fini n d'opérations, on trouvera une courbe C'_{n,h_n} continue entre -1 et $+1$ d'ordonnée nulle en $x = \frac{1}{2}$ et telle que $\Pi_{p,C'_{n,h_n}}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne tende pas vers zéro lorsque n croît indéfiniment et alors le théorème sera démontré. Ou bien, la suite de courbes C'_{n,h_n} sera telle que l'on ait, quel que soit n,

$$\left|\Pi_{h_n+1,C'_{n,h_n}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 2A - \frac{A}{2} - \frac{A}{2^2}, \ldots, \frac{A}{2^{n-1}} > A.$$

La courbe C'_{n,h_n} est d'ailleurs formée de sinusoïdes qui figurent dans C_{h_1}, C_{h_2}, ... C_{h_n} et de Ox dans le reste de l'intervalle -1, $+1$. Considérons alors la courbe Γ formée des sinusoïdes C_{h_1}, C_{h_2}, C_{h_3} ... C_{h_n}, ..., et de Ox dans le reste de l'intervalle $(-1+1)$. L'ordonnée y de Γ est une fonction de x évidemment continue pour $x \neq 0$. Elle est aussi continue pour $x = 0$, car $y = 0$ pour $x = 0$ et $|y| < |x|$ dans tout l'intervalle. De plus, l'ordonnée de Γ est nulle pour $x = \frac{1}{2}$. Il suffit donc, pour démontrer le théorème, de faire voir que $\Pi_{p,\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne tend par vers zéro lorsque p croît indéfiniment. Or ceci est bien évident, car, d'après la disposition de la courbe Γ, on a

$$\Pi_{h_n+1,\Gamma}(x) = \Pi_{h_n+1,C'_{n,h_n}}(x)$$

quel que soit n. Par suite, l'expression $\Pi_{p,\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne peut tendre vers 0 [1] puisque sa valeur absolue reste supérieure à A pour une infinité de valeurs de p : h_1, h_2, ..., h_n, ...

Formule générale d'interpolation. — Nous allons maintenant montrer qu'on peut remplacer l'emploi de la formule de Lagrange par un autre procédé d'interpolation, à la vérité plus compliqué,

---

[1] D'après la remarque que nous avons faite, il y a même une infinité d'abscisses : $\frac{1}{2n}$ en lesquelles la courbe $y = \Pi_{p,\Gamma}(x)$ ne tend pas vers la courbe Γ.

mais qui offre l'avantage de fournir une approximation indéfiniment croissante. Pour préciser : *on peut former, une fois pour toutes, des polynomes* $P_{p,q}(x)$ *qui jouissent de la propriété suivante. Étant donnée une fonction* $f(x)$ *définie et continue entre* o *et* 1, *on a*

$$f(x) = \Pi_1 + (\Pi_2 - \Pi_1) + \ldots + (\Pi_n - \Pi_{n-1}) + \ldots$$

en posant

$$\Pi_q = \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x)$$

et la série de polynomes qui représente $f(x)$ *converge uniformément entre* o *et* 1.

En d'autres termes, la connaissance des valeurs de la fonction continue pour les valeurs rationnelles de la variable permet *d'écrire immédiatement* les polynomes d'approximation, au moyen des polynomes $P_{p,q}(x)$, calculés *une fois pour toutes* indépendamment de toute fonction particulière.

Nous démontrerons ce résultat en introduisant les fonctions $\varphi_{p,q}(x)$ *continues* entre o et 1, qui sont définies par les égalités suivantes (en supposant $p \leqq q$) :

$$\varphi_{p,q}(x) = 0, \qquad \text{pour } 0 \leqq x \leqq \frac{p-1}{q} \qquad \text{et pour } x \geqq \frac{p+1}{q};$$

$$\varphi_{p,q}(x) = +qx - p + 1, \qquad \text{pour } \frac{p-1}{q} \leqq x \leqq \frac{p}{q};$$

$$\varphi_{p,q}(x) = -qx + p + 1, \qquad \text{pour } \frac{p}{q} \leqq x \leqq \frac{p+1}{q}.$$

On déterminera ensuite les polynomes $P_{p,q}(x)$ de façon que l'on ait, entre o et 1,

$$|\varphi_{p,q}(x) - P_{p,q}(x)| < \frac{1}{q^2}.$$

Alors, on aura

$$P_{p,q}(x) = \varphi_{p,q}(x) + \frac{1}{q^2}\varepsilon_{p,q}(x) \qquad \text{avec } |\varepsilon_{p,q}(x)| < 1.$$

D'où

$$\Pi_q = \Phi_q + \varepsilon_q,$$

en posant

$$\Phi_q = \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right)\varphi_{p,q}(x), \qquad \varepsilon_q = \frac{1}{q^2}\sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right)\varepsilon_{p,q}(x).$$

Il me suffira de montrer que Φ_q et ε_q tendent uniformément vers les limites $f(x)$ et o lorsque q croît indéfiniment. Or $|f(x)|$ est borné entre o et 1. Soit $|f(x)| < M$, on aura

$$|\varepsilon_q| < M\,\frac{q+1}{q^2}.$$

Donc $\varepsilon_q(x)$ tend uniformément vers zéro.

D'autre part, soient x un point quelconque entre o et 1, et q un entier quelconque; on peut toujours trouver un nombre $p \leqq q$, tel que l'on ait

$$\frac{p-1}{q} < x \leqq \frac{p}{q}.$$

On a donc

$$x = \frac{p-\theta}{q},$$

avec

$$0 \leqq \theta < 1,$$

et

$$\varphi_{0,q} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{p-1,q} = \theta,$$

$$\varphi_{p,q} = 1-\theta, \quad \varphi_{p+1,q} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{q,q} = 0.$$

D'où

$$\Phi_q = (1-\theta) f\left(\frac{p}{q}\right) + \theta f\left(\frac{p-1}{q}\right).$$

Or on peut prendre le nombre q assez grand pour que l'inégalité

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{q}$$

entraîne *partout*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|\Phi_q - f(x)| = \left|(1-\theta)\left[f\left(\frac{p}{q}\right) - f(x)\right] + \theta\left[f\left(\frac{p-1}{q}\right) - f(x)\right]\right| \leqq \varepsilon.$$

Autrement dit, $\Phi_q(x)$ tend uniformément vers $f(x)$.

Par suite $\Pi_q(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ et la série

$$\Pi_1 + \sum(\Pi_q - \Pi_{q-1})$$

converge uniformément vers $f(x)$.

Il est d'ailleurs clair que l'on pourrait, dans ce qui précède,

remplacer l'ensemble des nombres rationnels par un ensemble dénombrable partout dense quelconque. L'extension à n variables est immédiate.

Pour les applications, il serait très intéressant de calculer *effectivement* les polynomes $P_{p,q}(x)$ au moins pour les petites valeurs de p et de q (si l'on ne peut pas obtenir de formule générale). Pour faire ce calcul, on pourrait employer l'une quelconque des démonstrations du théorème de Weierstrass. On aurait ainsi des formules d'interpolation applicables à toute fonction continue avec un succès certain. On peut s'arranger de manière que ces formules soient dérivables, lorsque les dérivées existent. (*Voir* une Communication de M. E. Borel, dans les *Comptes rendus du* 3[e] *Congrès international des Mathématiciens.*)

Méthode d'approximation de Tchebicheff (1).

Les méthodes de représentation des fonctions par des séries de polynomes peuvent être comparées à celles qui permettent de représenter un nombre quelconque par la limite d'une suite de nombres rationnels. Dans cette dernière question, la considération des fractions continues permet d'obtenir une représentation univoque d'un nombre donné. De plus, en s'arrêtant à une réduite quelconque, on obtient une fraction qui présente une approximation supérieure à celle qui est donnée par toutes les fractions dont les termes ne sont pas plus simples.

Un progrès analogue peut être obtenu, dans le problème qui nous occupe, par la méthode de Tchebicheff. Son objet est le suivant : *étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b), chercher s'il existe un polynome approché $\Pi(x)$ donnant une approximation supérieure à tous les polynomes de même degré n.*

(1) *Voir* Tchebicheff, *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approchée des fonctions* (*Bulletin de la Société physico-mathématique de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1858, col. 145-149; *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. IX, 1859, p. 201-291).

La méthode de Tchebicheff a été reprise et rendue rigoureuse par M. Paul Kirchberger, *Inaugural-dissertation : Ueber Tchebychefsche Annäherungsmethoden*, Göttingen, 1902. Nous avons utilisé dans ce qui suit cet important travail.

Pour préciser cette question, considérons un polynome de degré n : $P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ et posons

$$y = f(x) - P(x).$$

La fonction $|y|$ est continue dans l'intervalle (a, b), elle y atteint donc au moins une fois son maximum m. Lorsque le polynome $P(x)$ varie en conservant le même degré, m varie également ; c'est une fonction de $A_0, A_1, \ldots, A_n$: $m(A_0, A_1, \ldots, A_n)$. C'est même une fonction continue, car on peut faire varier assez peu les quantités $A_0, A_1, \ldots, A_n$, pour que $|y|$ varie de moins de ε dans tout le domaine *limité* (a, b) et par suite pour que m varie aussi de moins de ε.

D'ailleurs, m est positif ou nul ; si même, comme nous le ferons maintenant, nous supposons que $f(x)$ ne coïncide pas entre a et b avec un polynome de degré n, m sera certainement positif. Par suite, l'ensemble des valeurs de m, lorsqu'on fait varier $A_0, \ldots, A_n$ de façon quelconque, a certainement une limite inférieure μ. Il s'agit de savoir si cette limite inférieure est atteinte pour un polynome déterminé de degré n :

$$\Pi(x) = \alpha_0 x^n + \ldots + \alpha_n,$$

que nous appellerions *polynome d'approximation de degré n*.

La fonction $m(A_0, \ldots, A_n)$ étant continue *atteint certainement* sa limite inférieure μ' lorsque $A_0, \ldots, A_n$ varient dans un domaine *borné et fermé* quelconque (c'est-à-dire, en particulier, lorsque les A_i restent entre des limites finies données). Mais, en général, μ' sera supérieur à μ.

Pour tourner cette difficulté, nous allons montrer qu'on peut déterminer des limites pour les A_i, telles que, en désignant par μ' la limite inférieure de m lorsque les A_i restent entre ces limites, on ait certainement $\mu' = \mu$.

Observons d'abord que μ est au plus égal au maximum M de $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b). Car on a

$$\mu \leqq m(0, 0, 0, \ldots, 0) = \text{maximum de } |f(x) - 0| \text{ dans } (a, b) = M.$$

Par suite, on ne change pas le problème en se restreignant aux polynomes de degré n pour lesquels on a $m \leqq M$. Or ces polynomes sont tels que les variations de leurs coefficients sont bornées. En

effet, soit $P(x)$ l'un d'eux ; on a entre a et b

$$|P(x)| \leqq |f(x)| + |P(x) - f(x)| \leqq M + m,$$

et pour les polynomes que nous prenons : $m \leqq M$; donc

$$|P(x)| \leqq 2M$$

entre a et b.

Dès lors, on pourra écrire tous ces polynomes sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)},$$

où $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont $n + 1$ abscisses *fixes* comprises entre a et b et où les y_i restent en valeur absolue inférieurs à $2M$.

Nous emploierons la notation (due à M. Poincaré)

$$B_0 x^n + \dots + B_n \ll B'_0 x^n + \dots + B'_n$$

(en supposant $B'_0, \dots, B'_n$ tous positifs), pour indiquer que l'on a

$$|B_p| \leqq B'_p \qquad (p = 0, 1, \dots, n).$$

Nous aurons alors

$$P(x) \ll 2M \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(x + |x_0|)\dots(x + |x_{i-1}|)(x + |x_{i+1}|)\dots(x + |x_n|)}{|(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)|}.$$

Le second membre est un polynome dont les coefficients sont fixes, $M_0 x^n + \dots + M_n$. Par conséquent, on a, pour tous les polynomes considérés,

$$(4) \qquad |A_0| \leqq M_0, \quad \dots, \quad |A_n| \leqq M_n.$$

Par suite, $m(A_0, A_1, \dots, A_n)$ atteint sa limite inférieure μ pour au moins un point $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ du domaine D [1] défini par les inégalités (4).

Ainsi, *il existe bien au moins un polynome d'approximation de degré n* : $\Pi(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_n$. Ceci montre en même temps que μ *est positif ;* sans quoi, si μ était nul, $f(x)$ serait iden-

---

[1] Ce raisonnement n'exclut pas l'hypothèse où $\alpha_0 = 0$, c'est-à-dire où le degré du polynome $\Pi(x)$ serait inférieur à n. Nous le considérerions encore comme de degré n avec un premier coefficient nul.

tique entre a et b à un polynome $\Pi(x)$ de degré n, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous allons démontrer maintenant une propriété essentielle des polynomes d'approximation : *Il existe un seul polynome d'approximation de degré donné n pour la fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).*

Nous savons déjà qu'il en existe au moins un : $\Pi(x)$. Posons $y = f(x) - \Pi(x)$. La fonction continue $|y|$ atteint son maximum μ pour au moins une valeur de x dans l'intervalle (a, b). Soient α une telle valeur et β la valeur correspondante de y; on a $\beta = \pm \mu$. Appelons A′ l'ensemble des points α' pour lesquels $\beta' = \mu$ et A″ l'ensemble des points α'' pour lesquels on a $\beta'' = -\mu$; l'un au moins des ensembles A′, A″ n'est pas nul. Ces deux ensembles sont évidemment fermés puisque y est continu. D'autre part, on peut trouver un nombre 2δ tel que l'oscillation de y soit inférieure à un nombre positif $\varepsilon < \mu$ dans tout intervalle de longueur inférieure ou égale à 2δ, compris dans (a, b).

Par suite, dans tout intervalle I de longueur δ ayant pour milieu un point α' il n'y aura aucun point α''. De même dans tout intervalle J de longueur δ ayant pour milieu un point α'' il n'y aura aucun point α'. Enfin, on pourra former autour de tout point γ qui n'appartient ni à A′, ni à A″, un intervalle K ayant ce point pour milieu et qui ne contient au sens étroit aucun point de A′ ni de A″. D'ailleurs tous les points de (a, b) sont chacun intérieurs au sens étroit à au moins un intervalle I, J, K. Par suite, on peut former un nombre fini k de ces intervalles tels que chaque point de (a, b) soit contenu au sens large dans l'un au moins d'entre eux et il en sera de même des intervalles contigus qu'on obtient en supprimant dans les k précédents leurs parties communes. Cela fait, si deux intervalles consécutifs ne renferment ni l'un ni l'autre aucun point de A′ (ou aucun point de A″), on réunira ces deux intervalles en un seul; après avoir fait cette opération aussi souvent que possible, on se trouvera avoir divisé le segment (a, b) en un nombre fini d'intervalles consécutifs, $L_1, L_2, \ldots, L_p$, qui ne contiennent chacun au sens large que des points d'un seul des ensembles A′ et A″, et tels que deux intervalles consécutifs renferment des points l'un de A′, l'autre de A″.

De plus, si L_q renferme des points de A′, L_{q+1} des points de A″, la distance du dernier point de A′ contenu dans L_q au premier point de A″ contenu dans L_{q+1} est supérieure à 2δ. Par suite on peut supposer que l'extrémité commune des deux intervalles L_q, L_{q+1} n'appartienne ni à A′, ni à A″ et que sa distance aux points de $(A'+A'')$ soit supérieure à δ. D'ailleurs il pourrait arriver qu'il n'y ait qu'un seul intervalle L qui serait (a, b).

Le raisonnement précédent s'applique quel que soit le polynome $\Pi(x)$. *Lorsque* $\Pi(x)$ *est un polynome d'approximation, je dis que le nombre p des intervalles* L *est supérieur à* $n+1$.

En effet, soient $a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, b$ les extrémités de ces intervalles, et considérons le polynome (¹)

$$Q(x) = \eta(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{p-1}).$$

Je dis que si $p-1 \leqq n$, on peut trouver un polynome $R(x)$ de degré n pour lequel le maximum m de $|f(x)-R(x)|$ soit inférieur au maximum μ de $|y| = |f(x)-\Pi(x)|$. En effet, si $p-1 \leqq n$, $Q(x)$ est de degré n au plus et par suite aussi le polynome : $R(x) = \Pi(x) + Q(x)$. Or $Q(x)$ ne change de signe qu'en passant d'un intervalle L_q à l'intervalle consécutif L_{q+1}. Par suite, on pourra choisir le signe de η de façon que $Q(x)$ soit positif dans tout intervalle L_q qui ne contient que des points α' et négatif dans les autres.

D'autre part, dans tout intervalle I, on a

$$\mu - \varepsilon < f(x) - \Pi(x) \leqq \mu$$

et, comme aucun intervalle I ne contient de points ξ_i, on a, dans tous ces intervalles,

$$|\eta|\,\delta^{p-1} < |Q(x)| < |\eta|(b-a)^{p-1}.$$

Enfin, $Q(x)$ est positif dans tout intervalle I (car tout intervalle I est contenu dans l'un des intervalles L qui contiennent des points α'). Alors, si l'on a pris $|\eta| < \frac{\mu-\varepsilon}{(b-a)^{p-1}}$, on aura, dans tous les intervalles I,

$$0 < f(x) - \Pi(x) - Q(x) < \mu - |\eta|\,\delta^{p-1}.$$

(¹) Dans le cas où il n'y aurait qu'un seul intervalle L, on prendrait $Q(x) = \eta$.

De même, on aura, dans les intervalles J,

$$-(\mu - |\eta|\delta^{p-1}) < f(x) - R(x) < 0.$$

Enfin, appelons E l'ensemble des points de (a, b) qui ne sont intérieurs au sens étroit à aucun intervalle I ou J. Les valeurs de $|y| = |f(x) - \Pi(x)|$, pour les points de cet ensemble, sont limitées supérieurement et la limite supérieure μ' est certainement inférieure à μ. Car cette limite supérieure μ' *est atteinte,* soit en un point extérieur aux intervalles I et J, soit en une extrémité de ces intervalles, mais jamais en un point intérieur au sens étroit à un intervalle I ou J, comme le sont les seuls points où $|y| = \mu$. Par suite, en tout point de l'intervalle (a, b), la fonction $|f(x) - R(x)|$ est inférieure à l'une des quantités $\mu - |\eta|\delta^{p-1}$ ou $\mu' < \mu$. Donc $\Pi(x)$ n'est pas un polynome d'approximation de degré n.

Réciproquement, soit un polynome $P(x)$ de degré n et m le maximum de $|y|$ en posant $y = f(x) - P(x)$. Formons les intervalles L correspondants. S'ils sont en nombre supérieur à $n+1$, il n'y a pas de polynome $P_1(x)$ d'ordre n, distinct de $P(x)$, pour lequel le maximum m_1 de $|f(x) - P_1(x)|$ soit inférieur *ou même simplement égal* à m. En effet, dans chaque intervalle L, $|y|$ atteint au moins une fois son maximum. Soient donc, par exemple,

$$\alpha'_1 < \alpha''_1 < \alpha'_2 < \alpha''_2 < \ldots$$

des abscisses en nombre supérieur à $n+1$ pour lesquelles y prend les valeurs $m, -m, m, -m, \ldots$. Si l'on a $m_1 \leqq m$, le polynome de degré n non identiquement nul

$$\psi(x) = [f(x) - P(x)] - [f(x) - P_1(x)]$$

prendra en $\alpha'_1, \alpha''_1, \ldots$ des valeurs

$$\psi(\alpha'_1) \geqq 0, \qquad \psi(\alpha''_1) \leqq 0, \qquad \psi(\alpha'_2) \geqq 0, \qquad \ldots.$$

Ces conditions, *en nombre supérieur à* $n+1$, impliquent *toujours* l'existence de $n+1$ racines inégales ou égales pour $\psi(x)$, ce qui est impossible. Donc $\psi(x)$ est identiquement nul, c'est-à-dire que $P_1(x)$ est identique à $P(x)$.

De ce qui précède il résulte d'abord qu'*il n'existe jamais qu'un seul polynome d'approximation de degré n. Il résulte aussi que la condition* nécessaire et suffisante *pour qu'un polynome de degré n soit un polynome d'approximation est que le nombre des intervalles* L *soit supérieur à* $n+1$.

Étant donnée la fonction $f(x)$ continue entre a et b, il existe un polynome d'approximation déterminé pour chaque valeur du degré n. Soit $\Pi_n(x)$ ce polynome et μ_n le maximum de $|f(x)-\Pi_n(x)|$ dans l'intervalle (a, b). Si l'on suppose que $f(x)$ ne coïncide entre a et b avec aucun polynome, μ_n est une fonction univoque et *positive* de n. C'est même une fonction qui n'est jamais croissante. Car $\Pi_n(x)$ peut être considéré comme un polynome de degré $n+1$ et, par suite, on a $\mu_n \geqq \mu_{n+1}$. Les nombres μ_n ne croissent jamais et restent positifs : *ils tendent donc vers une limite* λ. Le théorème de Weierstrass (qui a été obtenu postérieurement aux travaux de Tchebicheff) nous apprend que *cette limite est nulle*. En effet, dans le cas contraire, il n'y aurait aucun polynome $P(x)$ tel que l'on ait dans tout l'intervalle (a, b)

$$|f(x)-P(x)|<\lambda,$$

ce qui est contradictoire avec le théorème de Weierstrass.

Nous avons observé que le degré de $\Pi_n(x)$ pouvait être inférieur à n; soit m_n le degré de Π_n; m_n est nécessairement une fonction de n qui n'est jamais décroissante. De plus, on ne peut avoir $m_n=m_{n+1}$ que si $\mu_n=\mu_{n+1}$. Or, lorsque n croît indéfiniment, μ_n est toujours positif et tend vers zéro; par conséquent, μ_n *décroît* en passant à μ_{n+1} pour une infinité de valeurs de n (sinon pour toutes). Par suite, m_n croît (et d'au moins une unité) pour une infinité de valeurs de n. Donc *le degré* m_n *de* $\Pi_n(x)$ *croît indéfiniment avec* n.

Enfin, on voit que la série de polynomes dont la convergence uniforme vers $f(x)$ est la plus rapide pour des degrés successifs donnés sera la série

$$\Pi_1+(\Pi_2-\Pi_1)+(\Pi_3-\Pi_2)+\ldots+(\Pi_n-\Pi_{n-1})+\ldots,$$

qui présente le caractère de représentation univoque que nous avions voulu obtenir. Toutefois, observons que la correspondance

entre le développement et la fonction ne se poursuit pas dans tous ses détails. Ainsi, la somme des polynomes d'approximation de degré n de deux fonctions continues n'est pas toujours le polynome d'approximation de la somme de ces deux fonctions.

En utilisant le théorème de Weierstrass on peut arriver à calculer avec autant d'approximation que l'on veut les polynomes de Tchebicheff. La méthode peut ainsi être utilisée pratiquement pour la représentation *effective* en série de polynomes.

Pour le voir, nous démontrerons d'abord que la correspondance entre une fonction continue et son polynome d'approximation de degré n, est *continue*.

Autrement dit, soient

$$\Pi_n(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$
$$\Pi_n(x) + \Delta\Pi_n(x) = (\alpha_0 + \Delta\alpha_0)x^n + \ldots + (\alpha_n + \Delta\alpha_n),$$

les polynomes d'approximation de degré n de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues dans l'intervalle (a, b). Je dis que, *à tout nombre positif* η, *on peut faire correspondre un nombre* ε *tel que l'inégalité*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

supposée vérifiée dans tout l'intervalle (a, b), *entraîne*

$$|\Delta\alpha_0| < \eta, \quad |\Delta\alpha_1| < \eta, \quad \ldots, \quad |\Delta\alpha_n| < \eta.$$

En effet, soit μ le maximum de $|y|$ en posant $y = f(x) - \Pi_n(x)$. Si l'on écrit aussi $z = g(x) - \Pi_n(x) - \Delta\Pi_n(x)$, le maximum de $|z|$ est au plus égal à celui de $|g(x) - \Pi_n(x)|$, puisque $\Pi_n + \Delta\Pi_n$ est le polynome d'approximation de g. Or, on a

$$|g(x) - \Pi_n(x)| \leqq |g(x) - f(x)| + |f(x) - \Pi_n(x)| < \mu + \varepsilon.$$

Donc $|z| < \mu + \varepsilon$ entre a et b.

D'autre part, formons les intervalles L relatifs à y. Il y en a un nombre fini $k > n + 1$. On pourra prendre un point dans chacun de ces intervalles de façon que les valeurs correspondantes de y pour les abscisses

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \ldots < \alpha_{n+2} < \ldots$$

soient alternativement $+\mu$ et $-\mu$. On aura donc, à la fois,

$$-\mu-\varepsilon<g(\alpha_i)-\Pi_n(\alpha_i)-\Delta\Pi_n(\alpha_i)<\mu+\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<f(\alpha_i)-g(\alpha_i)<\varepsilon,$$

$$(-1)^i\mu=\Pi_n(\alpha_i)-f(\alpha_i)=(-1)^i\mu \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1, \ldots, k).$$

D'où, en ajoutant membre à membre,

$$(-1)^i\mu-\mu-2\varepsilon \quad <-\Delta\Pi_n(\alpha_i) \quad <(-1)^i\mu+\mu+2\varepsilon,$$

ou

$$\Delta\Pi_n(\alpha_1)>-2\varepsilon,\quad \Delta\Pi_n(\alpha_2)<+2\varepsilon,\quad \Delta\Pi_n(\alpha_3)>-2\varepsilon,\quad \ldots.$$

Je vais montrer maintenant que l'on a nécessairement

$$|\Delta\Pi_n(x)|<2\varepsilon$$

pour tous les points de l'un au moins des intervalles $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, ..., $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$. Il me suffira de faire voir que dans le cas contraire le polynome $\Delta\Pi_n(x)$ de degré n aurait au moins n maxima ou minima distincts, ce qui est évidemment impossible puisque la dérivée de $\Delta\Pi_n$ est de degré $(n-1)$.

Supposons donc qu'il existe, dans chacun des intervalles indiqués, au moins une valeur α'_1, α'_2, ..., α'_{n+1} de x pour laquelle on ait $|\Delta\Pi_n(x)|>2\varepsilon$.

Si l'on a $\Delta\Pi_n(\alpha'_1)<-2\varepsilon$ ou $\Delta\Pi_n(\alpha'_2)<-2\varepsilon$, comme on a $\Delta\Pi_n(\alpha_1)>-2\varepsilon$ et $\Delta\Pi_n(\alpha_3)>-2\varepsilon$, il y a un minimum de $\Delta\Pi_n(x)$ atteint dans l'intervalle $\alpha_1\alpha_3$. Sinon, on a

$$\Delta\Pi_n(\alpha'_1)>2\varepsilon,\qquad \Delta\Pi_n(\alpha'_2)>2\varepsilon\qquad \text{et}\qquad \Delta\Pi_n(\alpha_2)<2\varepsilon;$$

il y a donc encore un minimum entre α_1 et α_3.

De même, si $\Delta\Pi_n(\alpha'_2)>2\varepsilon$ ou $\Delta\Pi_n(\alpha'_3)>2\varepsilon$, comme on a

$$\Delta\Pi_n(\alpha_2)<2\varepsilon\qquad \text{et}\qquad \Delta\Pi_n(\alpha_4)<2\varepsilon,$$

il y a un maximum entre α_2 et α_4; sinon on a $\Delta\Pi_n(\alpha'_2)<-2\varepsilon$, $\Delta\Pi_n(\alpha'_3)<-2\varepsilon$ et $\Delta\Pi_n(\alpha_3)>-2\varepsilon$ et il y a un maximum entre α_2 et α_4. Et ainsi de suite : il y a alternativement un minimum, puis un maximum dans chacun des n intervalles $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_3\alpha_5$, ..., $\alpha_n\alpha_{n+2}$.

Ainsi, il est bien prouvé qu'il existe un intervalle $H_i:(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ dans lequel on a constamment $|\Delta\Pi_n(x)|<2\varepsilon$.

Lorsque $g(x)$ varie en restant tel que l'on ait $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, $\Delta\Pi_n$ varie, mais l'inégalité $|\Delta\Pi_n(x)|<2\varepsilon$ est toujours vérifiée dans l'un au moins des $n+1$ intervalles $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ sans que ce soit nécessairement toujours le même. Prenons $n+1$ points *fixes* dans chacun des intervalles H_i : $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$, on pourra toujours mettre $\Delta\Pi_n(x)$ sous l'une des $n+1$ formes

$$\psi_i(x)=\sum_{h=1}^{h=n+1} u_h^{(i)}\frac{(x-x_1^{(i)})\ldots(x-x_{h-1}^{(i)})(x-x_{h+1}^{(i)})\ldots(x-x_{n+1}^{(i)})}{(x_h^{(i)}-x_1^{(i)})\ldots(x_h^{(i)}-x_{h-1}^{(i)})(x_h^{(i)}-x_{h+1}^{(i)})\ldots(x_h^{(i)}-x_{n+1}^{(i)})},$$

$$(i=1,\ldots,n+1),\qquad \text{avec}\qquad |u_h^{(i)}|<2\varepsilon.$$

Or, on a

$$\psi_i(x)\leqq 2\varepsilon(M_0^{(i)}x^n+\ldots+M_n^{(i)}),$$

avec

$$M_0^{(i)}x^n+\ldots+M_n^{(i)}=\sum_{h=1}^{h=n+1}\frac{(x+|x_1^{(i)}|)\ldots(x+|x_{h-1}^{(i)}|)(x+|x_{h+1}^{(i)}|)\ldots(x+|x_{n+1}^{(i)}|)}{|(x_h^{(i)}-x_1^{(i)})\ldots(x_h^{(i)}-x_{h-1}^{(i)})(x_h^{(i)}-x_{h+1}^{(i)})\ldots(x_h^{(i)}-x_{n+1}^{(i)})|}.$$

Les quantités $M_p^{(h)}$ sont des nombres positifs fixes indépendants de la fonction $g(x)$; soit N le plus grand de tous; N est indépendant de $g(x)$ et de ε; on peut donc prendre ε de façon que l'on ait $2\varepsilon N<\eta$, quel que soit le nombre positif donné d'avance η.

Par suite

$$\Delta\Pi_n(x)\leqq\eta(x^n+x^{n-1}+\ldots+1).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer; on en déduit en même temps que dans l'intervalle (a, b) on aura

$$|\Delta\Pi_n(x)|<\eta(c^n+c^{n-1}+\ldots+1),$$

en supposant $c>|b|$, $c>|a|$.

Par suite, en prenant η assez petit, on pourra rendre le premier membre inférieur dans (a, b), à une quantité positive donnée η'.

Revenons à l'application que nous avions annoncée. Étant donnée la fonction $f(x)$ continue dans (a, b), on peut prendre pour fonction $g(x)$ un certain polynome $P(x)$, d'après le théorème de Weierstrass. Or la recherche du polynome d'approximation $\Pi_n+\Delta\Pi_n$ *d'un polynome* donné $P(x)$ est évidemment un

problème *algébrique* que l'on pourra toujours résoudre par des moyens d'ailleurs plus ou moins compliqués, sur lequels nous ne nous étendrons pas.

On obtient ainsi les coefficients du polynome d'approximation Π_n de $f(x)$ avec une approximation inférieure à un nombre quelconque η donné d'avance. Ceci revient à dire que l'on sait les calculer. Ainsi, *lorsqu'une fonction continue est donnée de telle manière que l'on sache calculer les polynomes approchés de Weierstrass, le calcul des polynomes d'approximation de Tchebicheff n'exige que des opérations algébriques.*

CHAPITRE V.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES PAR DES SÉRIES DE POLYNOMES.

Nous avons vu que la somme d'une série de fonctions continues dans un intervalle (a, b) peut être une fonction discontinue (p. 38). Nous avons vu aussi que la somme d'une telle série peut être représentée par une série de polynomes qui converge dans (a, b).

Par conséquent, le théorème de Weierstrass (p. 51) n'admet pas de réciproque. On peut seulement observer que, si une fonction discontinue est représentable dans un intervalle (a, b) par une série de polynomes, cette série ne converge pas uniformément dans (a, b); elle n'y converge même pas quasi-uniformément (p. 42).

Il est naturel, maintenant, de chercher à étendre à des classes de fonctions plus vastes que celle des fonctions continues les méthodes d'approximation par des polynomes [1].

Le procédé le plus simple consiste à trouver une fonction *continue* de x, $f(x, \varepsilon)$, qui tende vers la fonction donnée $f(x)$, lorsque ε tend vers zéro. On pourra ensuite déterminer un polynome $P(x, \varepsilon)$ tel que l'on ait, dans l'intervalle (a, b),

$$|f(x, \varepsilon) - P(x, \varepsilon)| < \varepsilon.$$

Par suite, on aura

$$P(x, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) + \theta\varepsilon$$

[1] Pour tout ce qui concerne les fonctions discontinues, je ne puis mieux faire que de renvoyer aux *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire, qui paraîtront quelques semaines après cet Ouvrage. M. Baire faisait son Cours au Collège de France en même temps que je faisais le mien à l'École normale, et j'ai été bref sur les parties qu'il traitait. On sait d'ailleurs quelle autorité ses travaux si profonds et si personnels confèrent à M. Baire dans ces questions.

avec

$$|\theta| < 1,$$

et $P(x, \varepsilon)$ tend vers $f(x)$ lorsque ε tend vers zéro. On peut donc écrire

$$f(x) = P(x, 1) + \left[P\left(x, \frac{1}{2}\right) - P(x, 1)\right] + \ldots$$
$$+ \left[P\left(x, \frac{1}{n}\right) - P\left(x, \frac{1}{n-1}\right)\right] + \ldots.$$

De plus, on voit que si dans un intervalle partiel (a_1, b_1), $f(x, \varepsilon)$ tend uniformément vers $f(x)$, la série convergera uniformément vers $f(x)$ dans ce petit intervalle. Si l'on désire qu'elle converge de plus *absolument* dans un intervalle on utilisera la remarque de la page 66.

Fonctions discontinues en des points isolés. — Considérons d'abord une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) sauf aux points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En prenant ε suffisamment petit, elle sera continue dans le domaine D formé par ce qui reste de l'intervalle (a, b) lorsqu'on enlève les segments $\sigma_i(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. Nous allons maintenant former une fonction $f(x, \varepsilon)$ continue dans tout l'intervalle (a, b), coïncidant avec $f(x)$ dans le domaine D et qui tende vers $f(x)$. Pour cela, supposons d'abord que la fonction $f(x)$ soit bornée entre a et b; alors $f(x)$ a une certaine valeur finie en x_i. Soient A, A′, B les points de la courbe $y = f(x)$ qui ont pour abscisses $x_i - \varepsilon$, $x_i + \varepsilon$, x_i. Nous prendrons pour les portions de la courbe $y = f(x, \varepsilon)$ comprises entre les droites : $x = x_i - \varepsilon$, $x = x_i + \varepsilon$, les droites AB, BA′. Et de même dans tous les segments σ_i. La fonction $f(x, \varepsilon)$ ainsi définie est continue dans (a, b) et tend vers $f(x)$. Elle tend même uniformément vers $f(x)$ dans le domaine D qui correspond à une valeur *déterminée* quelconque de ε.

Si, pour une abscisse x_i, la valeur de la fonction $f(x)$ était $\pm\infty$, on prendrait pour ordonnée du point B le nombre $\pm \frac{1}{\varepsilon}$.

Fonctions dont les discontinuités forment un ensemble dénombrable E. — Il n'est pas évident qu'on puisse trouver une fonction dont les discontinuités forment un ensemble dénombrable quelconque.

Ainsi, à un point de vue analogue, on sait que l'ensemble à deux dimensions des singularités d'une fonction analytique au sens de Weierstrass est un ensemble *fermé*. Il y aurait donc lieu de se demander si le seul fait d'imposer à une fonction réelle certains points de discontinuité sur l'axe Ox n'entraîne pas à lui seul l'existence d'autres points de discontinuité.

Cependant nous allons montrer qu'on peut considérer un ensemble quelconque E de points sur l'axe Ox comme ensemble de points de discontinuité, lorsque cet ensemble E est dénombrable. En effet, soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ les abscisses des points de E. Appelons $f(x)$ la fonction qui est égale à $\frac{1}{n}$ pour $x = a_n$ et qui est nulle pour les points α qui n'appartiennent pas à E. Cette fonction admet comme points de discontinuité les points de E *et ces points seulement*. En effet, dans un intervalle $(a_n - h, a_n + h)$ si petit qu'il soit autour de a_n, il y a des points α (sans quoi E aurait la puissance du continu). Par suite, l'oscillation de $f(x)$ *au point* a_n est certainement supérieure ou égale à $\frac{1}{n}$. Ainsi tous les points a_n sont des points de discontinuité; il n'y en a pas d'autres. En effet, soit ε un nombre positif donné et soit N un entier déterminé supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. Si un point α n'appartient pas à E, il est distinct des points $a_1, a_2, \ldots, a_N$; soit $2h$ la distance minimum de α à ces points. Tous les points x compris dans l'intervalle $(\alpha - h, \alpha + h)$ sont des points de E de rangs supérieurs à N, ou bien n'appartiennent pas à E. Dès lors, on a

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

pour

$$|x - \alpha| < h.$$

Par conséquent, les points qui ne sont pas dans E sont des points de continuité.

Nous allons montrer [1] qu'*une fonction* $f(x)$ *définie dans un intervalle* (a, b) *et dont l'ensemble* E *des discontinuités est*

[1] Voir LEBESGUE, *Sur l'approximation des fonctions* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1898, p. 278).

dénombrable, peut être représentée par une série de polynomes (qui converge uniformément dans tout intervalle intérieur à un intervalle de continuité).

Soient G l'ensemble des points de $c(E)$ qui appartiennent à E', H l'ensemble des points de $c(E)$qui n'appartiennent pas à E'. Tout point de H est situé dans un intervalle de continuité; soit (k', k'') le plus grand possible (les points k', k'' appartiennent à E ou E') (p. 7). Les points de G ne sont dans aucun intervalle de continuité. Observons maintenant que les intervalles (k', k'') n'ont pas de parties communes, il y en a donc un ensemble dénombrable (p. 7). Par suite les points qui appartiennent à E et les points k', k'' forment un ensemble dénombrable C : $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$.

Pour démontrer le théorème, il nous suffira de déterminer une fonction $f(x, n)$ qui tende vers $f(x)$ lorsque n croît indéfiniment et cela uniformément dans tout intervalle de continuité. Dans ce but, considérons dans la suite des n abscisses $c_1, c_2, \ldots, c_n$, deux points c_p, c_e, consécutifs sur l'axe Ox. Les points c_p, c_e ne peuvent être, ni l'un, ni l'autre, intérieurs au sens étroit à un intervalle (k', k''). Par suite, s'il y a entre c_p et c_e un point d'un intervalle (k', k''), cet intervalle est contenu tout entier (au sens large) dans c_p, c_e.

Alors deux cas pourront se présenter : 1° il y a entre c_p et c_e, *zéro ou plusieurs* intervalles (k', k''); nous prendrons pour arc de la courbe $y = f(x, n)$ compris entre les abscisses c_p et c_e, la droite $C_p C_e$ en désignant en général par M le point de coordonnées : $m, f(m)$; 2° il y a entre c_p et c_e un seul intervalle (k', k''); soit alors (k'_1, k''_1) un intervalle compris dans $k'k''$ et tel que

$$k'k'_1 = \frac{k'k''}{n} = k''k''_1.$$

La fonction $f(x)$ est certainement continue dans l'intervalle (k'_1, k''_1), extrémités comprises. Nous prendrons pour la courbe $y = f(x, n)$, l'arc de courbe continu de $y = f(x)$ compris entre K'_1 et K''_1 et nous joindrons C_p à K'_1, C_e à K''_1 par des droites.

Si maintenant on suppose que $f(x)$ n'est pas finie, elle n'a de valeurs infinies que pour des points d'abscisses $c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots$. Alors, dans la construction précédente, nous prendrons pour point C_{p_i} le point d'abscisse c_{p_i} et d'ordonnée $\pm n$ [suivant que

$f(c_{p_i}) = \pm\infty$]. La courbe $y = f(x, n)$, ainsi définie, est continue quel que soit n. Je dis qu'elle tend vers $f(x)$. En effet, $f(c_p, n)$ est égal à $f(c_p)$ pour $p \geqq n$, ou croît indéfiniment si $f(c_p)$ est infini. De même, considérons un intervalle (k', k''); ses extrémités sont deux points c_q, c_r. Par suite, pour $n > q$ et $n > r$, $f(x, n)$ coïncide avec $f(x)$ dans l'intervalle $k'_1 k''_1$; si l'on considère une abscisse x comprise entre k' et k'', on aura $f(x) = f(x, n)$ lorsque n est supérieur aux quatre nombres : q, r, $\frac{k''-k'}{x-k'}$, $\frac{k''-k'}{k''-x}$. Donc, $f(x, n)$ tend vers $f(x)$ dans tout intervalle de continuité, et cela uniformément dans tout intervalle *fixe* intérieur au sens étroit à cet intervalle de continuité.

Restent enfin les points de continuité appartenant à G; soit α l'abscisse de l'un d'eux, c'est la limite de certains points c_n. Comme $f(x)$ et $f(x, n)$ sont continus pour $x = \alpha$, on peut déterminer ε de façon que l'on ait

$$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x, n) - f(\alpha, n)| < \frac{1}{n}$$

pour

$$|x - \alpha| < \varepsilon.$$

Or, quel que soit n, il y a des points c_p dans l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ et d'indice aussi grand que l'on veut, en particulier d'indice plus grand que n, soit c_{p_n} l'un d'eux. Puisque $p_n > n$, on a

$$f(c_{p_n}) = f(c_{p_n}, n),$$

et comme $|c_{p_n} - \alpha| < \varepsilon$, on aura

$$|f(c_{p_n}) - f(\alpha)| < \frac{1}{n}, \quad |f(c_{p_n}, n) - f(\alpha, n)| < \frac{1}{n}.$$

D'où

$$|f(\alpha) - f(\alpha, n)| < \frac{2}{n}.$$

Ainsi, $f(x, n)$ tend vers $f(x)$ même aux points de l'ensemble G.

Voici une autre démonstration, due à M. Lebesgue :

Soit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ un ensemble E de valeurs de x partout dense et contenant les valeurs de discontinuités. Rangeons par ordre de grandeur les n premières valeurs de cette suite, on obtient ainsi la suite

(S) $$a, \; c_{\alpha_1}, \; c_{\alpha_2}, \; \ldots, \; c_{\alpha_n}, \; b.$$

Désignons par $f(x, n)$ la fonction continue de x égale à $f(x)$ pour chacune des valeurs de S et qui varie linéairement quand x varie entre deux valeurs de cette suite.

Je dis que, quand n croît indéfiniment, $f(x, n)$ tend vers $f(x)$. Cela est évident si x appartient à E. S'il n'en est pas ainsi, x est compris entre deux nombres de la suite S, c_{β_n}, c_{γ_n} et $f(x, n)$ est comprise entre

$$f(c_{\beta_n}) \quad \text{et} \quad f(c_{\gamma_n}).$$

Mais $f(x)$ est continue au point x, puisque x n'appartient pas à E, donc, c_{β_n} et c_{γ_n} tendant vers x car E est partout dense, $f(c_{\beta_n})$ et $f(c_{\gamma_n})$ tendent vers $f(x)$, et il en est de même de $f(x, n)$.

Il est d'ailleurs évident que la convergence est uniforme dans tout intervalle de continuité; mais il faut des précautions supplémentaires pour que la convergence soit absolue.

Enfin, on peut remarquer que si E a servi à définir les polynomes $P_{p,q}$ de la page 80, la fonction considérée admet le développement $\Pi_1 + (\Pi_2 - \Pi_1) + \ldots$, indiqué à cet endroit.

Théorème général de M. Baire. — Les méthodes précédentes nous donnent le moyen d'exprimer certaines fonctions discontinues sous forme de série de polynomes. Il serait très intéressant de déterminer, *a priori,* toutes les fonctions auxquelles il y a lieu d'étendre ces méthodes.

La solution complète de ce problème a été obtenue par M. Baire ([1]). Nous n'exposerons pas sa démonstration qui nous entraînerait trop loin; mais, pour énoncer le résultat, il nous faut définir la continuité relativement à un ensemble.

Considérons une fonction $f(x)$ définie en tous les points d'un ensemble linéaire E, et soit x_0 un point quelconque de E. Nous dirons que *$f(x)$ est continue en x_0* RELATIVEMENT A L'ENSEMBLE E, *si l'on peut faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre α tel que l'on ait*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pour tous les points x DE L'ENSEMBLE E *qui sont compris dans*

([1]) *Voir* BAIRE, *Sur les fonctions de variables réelles.* Thèse soutenue en mars 1899.

l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. (En particulier si E est l'ensemble des points d'un intervalle, la continuité par rapport à E est la continuité au sens ordinaire).

Mais cette définition ne peut correspondre à une propriété de $f(x)$ en x_0 que si (aussi petit que soit α) il existe toujours au moins un point de E autre que x_0 dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, c'est-à-dire si tout point de l'ensemble est point limite. Il faudra même se restreindre au cas où E est un ensemble parfait si l'on veut que la continuité en tous les points de E entraîne la continuité uniforme dans E. Supposons donc E parfait; au voisinage d'un point de E, il y a toujours une infinité d'autres points de E. Si, au voisinage de tout point de E, il y a des points de E où la fonction est continue relativement à E, nous dirons que *la fonction est ponctuellement discontinue relativement à l'ensemble parfait* E.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général de M. Baire : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction uniforme puisse être représentée par une série de polynomes est que cette fonction soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait* ([1]).

D'après la remarque que nous avons faite (p. 65), *c'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse considérer la fonction comme limite de fonctions continues.*

Admettons ce théorème. Il va nous permettre de donner un exemple d'une fonction qui n'est pas limite de fonctions continues. Il suffit de considérer la fonction $f(x)$ définie entre o et 1, qui est égale à o pour les abscisses rationnelles et à 1 pour les autres. Si l'on considère en particulier l'ensemble linéaire parfait E constitué par tous les points de l'intervalle (o, 1), il est manifeste que tous les points de E seront des points de discontinuité relativement à E. Par suite, la fonction n'est pas ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

Classification de M. Baire. — M. Baire a proposé une classification des fonctions au point de vue qui nous occupe. Il appelle

([1]) La démonstration de ce théorème est développée par M. Henri Lebesgue dans la Note II.

fonctions de classe 0 toutes les fonctions continues. Il appelle ensuite *fonctions de classe* 1 toutes les fonctions discontinues qui sont limites de fonctions continues. Nous en avons trouvé des exemples à propos de la convergence des séries. Toutes les fonctions qui ont une infinité dénombrable de discontinuités sont des fonctions de première classe. Le théorème de Baire nous apprend même à quelles conditions une fonction discontinue est de première classe.

De même, on appellera fonctions de seconde classe toutes les fonctions qui sont limites de fonctions de première classe sans être de classe 0 ou 1. Telle est la fonction $f(x)$ que nous avons définie au paragraphe précédent où nous avons montré qu'elle n'est pas de première classe. Elle est bien d'ailleurs limite de fonctions $f_n(x)$ de première classe. Il suffit de prendre pour $f_n(x)$ une fonction égale à 1 entre 0 et 1 sauf pour les points d'abscisses $\frac{p}{q}$ (avec $p \leqq q \leqq n$), lesquels sont en nombre limité et où l'on suppose $f_n(x) = 0$.

Plus généralement, on appellera *fonction de classe n*, toute limite de fonctions de classe $n-1$, qui n'appartient à aucune des classes 0, 1, 2, ..., $n-1$. Enfin, on peut définir des fonctions de classe ω, $\omega+1$, ..., ω^2, ..., ω^ω, ... en désignant par ces symboles les divers nombres transfinis de M. Cantor; mais nous n'y insistons pas.

Les théorèmes que nous avons obtenus nous permettent d'affirmer que les fonctions de classe 0 ou 1 sont les seules qui soient représentables par des séries de polynomes.

Mais, d'après la définition même des fonctions de seconde classe, *on pourra les représenter par des séries doubles de polynomes* $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} P_{\alpha,\beta}$, la sommation étant effectuée d'abord par rapport à β, puis par rapport à α, *sans qu'on puisse réduire cette série double à une série simple.* Et cette propriété caractérise les fonctions de seconde classe. Plus généralement, *une fonction de classe n sera représentable par une série multiple d'ordre n dont tous les termes sont des polynomes.*



NOTE I.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

---

1. *Séries génératrices.* — Considérons une fonction analytique $f(t)$ holomorphe ([1]) pour $t = 0$, et soit :

$$(1) \qquad f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

la série de Mac-Laurin qui la définit pour t voisin de zéro. Considérons, d'autre part, un développement de la forme

$$(2) \qquad \varphi_0(a_0) + \varphi_1(a_0, a_1) + \ldots + \varphi_n(a_0, a_1, \ldots a_n) + \ldots$$

où chaque terme φ_n est une fonction entière donnée de a_0, a_1, ... a_n. Je conviens de dire qu'un tel développement est une *série génératrice* s'il converge et représente $f(1)$, quelle que soit la fonction $f(t)$, sous la seule condition que $f(t)$ soit holomorphe pour t réel, positif et inférieur ou égal à 1.

La série génératrice (2) sera dite *normale* si chaque terme φ_n de (2) est linéaire et homogène en a_0, a_1, ..., a_n.

2. *Étoile d'holomorphie.* — Admettons, pour un instant, que nous connaissions une série génératrice (2); z désignant une quantité complexe, introduisons la fonction $f_1(t) \equiv f(zt)$ et appliquons à cette fonction le développement (2). La série de Mac-Laurin qui représente $f_1(t)$ est

$$(3) \qquad f_1(t) = a_0 + a_1 z t + \ldots + a_n z^n t^n + \ldots,$$

([1]) Cette fonction peut être une branche (bien déterminée pour t voisin de zéro) d'une fonction multiforme.

et le développement (2) correspondant est

$$(4)\qquad \varphi_0(a_0)+\varphi_1(a_0,\, a_1 z)+\ldots+\varphi_n(a_0, a_1 z,\, \ldots,\, a_n z^n)+\ldots.$$

Donnons à z une valeur invariable z_0 : ce développement (4) converge et représente $f_1(1)=f(z_0)$, si la fonction $f_1(t)$ ou $f(z_0 t)$ est holomorphe quand t croît par valeurs réelles de 0 à 1 (limites comprises). Interprétons cette condition.

Soit P l'affixe du point z_0 dans le plan complexe : quand t croît par valeurs réelles de 0 à 1, le point complexe $z_0 t$ décrit le segment de droite OP. Pour que $f_1(t)$ soit holomorphe pour $0 \leq t \leq 1$, *il faut et il suffit que la fonction* (*ou branche de fonction*) $f(z)$ *soit prolongeable régulièrement, à partir de* O, *le long de* OP, *jusqu'au point* P *inclusivement.* Appelons A l'ensemble de tous les points P tels que cette condition soit remplie : les points du plan exclus de A forment des demi-droites ayant pour origines les points μ tels que la fonction $f(z)$ soit prolongeable régulièrement le long de Oμ jusqu'au point μ *exclusivement;* ces demi-droites s'obtiennent en continuant, *au delà de chaque point* μ, la direction Oμ.

Adoptant la terminologie de M. Mittag-Leffler (un peu modifiée), j'appellerai le domaine A l'*étoile d'holomorphie* [1], de centre O, attachée à la branche de fonction $f(z)$. Les points μ seront les *sommets* de l'étoile.

---

[1] Quand la fonction $f(z)$ n'admet, dans tout le plan, qu'un nombre fini de points singuliers, l'étoile comprend tout le plan sauf un nombre fini de demi-droites. Quand $f(z)$ est uniforme, mais n'existe que dans une aire limitée du plan, l'étoile fait sûrement partie de cette aire. Mais l'étoile peut être tout entière à distance finie sans que la fonction $f(z)$ présente de lignes singulières. Par exemple, considérons un ensemble parfait discontinu (E) de points situés sur l'axe Oξ entre 1 et 2, et soit $\eta = g(\xi)$ une fonction continue croissante qui prend *toutes* les valeurs de 0 à 1 (limites comprises), quand ξ coïncide avec un point arbitraire de (E). Posons

$$z = \xi(\cos 2\pi\eta + i \sin 2\pi\eta);$$

à chaque point ξ_1 de (E) correspond un point z_1 du plan z; les points z_1 forment un ensemble parfait (E_1) qui, nulle part, n'est continu. D'autre part, il est facile de construire une fonction $f(z)$, uniforme dans tout le plan, et dont l'ensemble des singularités coïncide avec l'ensemble (E_1). Cette fonction uniforme ne présente *aucune ligne singulière*; néanmoins, l'étoile A (qui comprend à son intérieur le cercle de centre 0 et de rayon 1) *est comprise tout entière à l'intérieur du cercle de centre* 0 *et de rayon* 2; car une droite quelconque issue de l'origine rencontre un point singulier dont la distance à l'origine est au moins égale à 1 et au plus égale à 2.

La série (4) *converge et représente* $f(z)$ *dans toute l'étoile d'holomorphie* A.

Ainsi, pour déduire d'une série génératrice (2) une série qui représente $f(z)$ dans toute l'étoile A, il suffit, dans les termes de la série (2), de remplacer

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

par

$$a_1 z, \quad \ldots, \quad a_n z^n, \quad \ldots.$$

En particulier, si la série *génératrice* (2) est *normale*, on a

$$\varphi_n(a_0, a_1 z, \ldots, a_n z^n) = \nu_0 a_0 + \nu_1 a_1 z + \ldots + \nu_n a_n z^n, \tag{5}$$

les ν étant numériques. La série (4) est alors une série de polynomes en z, dont le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme est une expression linéaire et homogène en a_0, $a_1 z$, $a_2 z^2$, $\ldots$, $a_n z^n$, à coefficients numériques ; elle converge [quel que soit $f(z)$] dans toute l'étoile d'holomorphie. Un tel développement sera dit *développement de M. Mittag-Leffler* ou *développement* (M).

3. *Étoile d'holomorphie attachée à une fonction de plusieurs variables.* — Considérons maintenant une fonction (ou branche de fonction) analytique, f, de plusieurs variables, soit de trois variables $z = x + iy$, $u = x_1 + iy_1$, $v = x_2 + iy_2$, fonction qui, par hypothèse, est holomorphe pour $z = 0$, $u = 0$, $v = 0$. Il nous est loisible de représenter le système de variables (u, v, w) par un point P de l'espace réel à 6 dimensions $Oxyx_1y_1x_2y_2$.

Remplaçons (dans f) z par zt, u par ut, v par vt, et posons [1] :

$$f_1(t) \equiv f(zt, ut, vt).$$

Formons, pour cette fonction $f_1(t)$, la *série génératrice* (2); la série de Mac-Laurin qui représente $f_1(t)$ est

$$f_0 + \frac{(zf'^0_z + uf'^0_u + vf'^0_v)}{1} + \ldots + \frac{(zf'^0_z + uf'^0_u + vf'^0_v)_{(n)}}{n!} + \ldots;$$

f_0, f'^0_z, f'^0_u, f'^0_v désignent les valeurs de f et de ses dérivées par-

[1] On reconnaît là le procédé employé dans la théorie des séries de Taylor pour passer du cas d'une variable au cas de n variables.

tielles pour $z = u = v = 0$, et $(zf_z'^0 + uf_u'^0 + vf_v'^0)_{(n)}$ est la puissance symbolique $n^{\text{ième}}$ de $(zf_z'^0 + uf_u'^0 + vf_v'^0)$. L'expression

$$(6) \qquad \frac{(zf_z'^0 + uf_u'^0 + vf_v'^0)_{(n)}}{n!} \equiv p_n(z, u, v)$$

est donc une forme homogène de degré n en z, u, v, dont les coefficients (à des facteurs numériques près) sont les valeurs (pour $z = u = v = 0$) des diverses dérivées partielles d'ordre n de f.

Pour former la série génératrice (2) qui représente $f_1(t)$, il suffit, dans les termes φ_n de cette série, de remplacer $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, par $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$. La série ainsi obtenue converge pour $z = z_0$, $u = u_0$, $v = v_0$ et représente

$$f_1(1) \equiv f(z_0, u_0, v_0),$$

si la fonction $f_1(t)$ est holomorphe quand t croît, par valeurs réelles, de 0 jusqu'à 1 (limites comprises). Interprétons cette condition.

Soit P le point de l'espace $Oxyx_1y_1x_2y_2$ défini par (z_0, u_0, v_0); quand t croît de 0 à 1, le point (z_0t, u_0t, v_0t) ou P' décrit le segment de droite OP (1). Pour que $f_1(t)$ soit holomorphe pour $0 \leqq t \leqq 1$, il faut et il suffit que la fonction (ou branche de fonction) $f(z, u, v)$ soit prolongeable régulièrement le long du segment de droite OP à partir du point O jusqu'au point P inclusivement.

Représentons, ici encore, par A l'ensemble des points P de l'espace $Oxyx_1y_1x_2y_2$ pour lesquels cette condition est remplie. Les points de l'espace exclus de A sont distribués sur les demi-droites ayant pour origine les points μ tels que la fonction $f(z, u, v)$ soit prolongeable régulièrement le long de Oμ jusqu'au point μ

(1) Cette terminologie doit être interprétée dans son sens *analytique* : elle signifie que les coordonnées $(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2)$ du point P' (à savoir $x^0t, y^0t, x_1^0t, y_1^0t, x_2^0t, y_2^0t$) vérifient les équations :

$$\frac{x}{x^0} = \frac{y}{y^0} = \frac{x_1}{x_1^0} = \frac{y_1}{y_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{y_2}{y_2^0},$$

et que, quand t varie de 0 à 1, x varie de 0 à x^0, y de 0 à y^0, ..., y_2 de 0 à y_2^0.

exclusivement; ces demi-droites s'obtiennent en continuant, *au delà de chaque point* μ, la direction $O\mu$.

Nous appellerons le domaine A *l'étoile d'holomorphie, de centre* O, *attachée à la branche de fonction* $f(z, u, v)$; les points μ seront les *sommets* de l'étoile.

La série

$$\varphi_0(p_0) + \varphi_1(p_0, p_1) + \ldots + \varphi_n(p_0, p_1, \ldots, p_n) + \ldots \tag{7}$$

converge et représente $f(z, u, v)$ *dans toute l'étoile* A.

En particulier, si la série *génératrice* (2) est *normale*, on a

$$\varphi_n(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 + \ldots + \nu_n p_n \tag{8}$$

(les coefficients ν étant numériques). *Les termes de la série* (7) *sont alors des polynomes en* z, u, v *linéaires et homogènes par rapport aux valeurs* (*pour* $z = u = v = 0$) *des dérivées successives de la fonction* $f(z, u, v)$. La série converge, quelle que soit la fonction f, dans toute l'étoile A attachée à f et y représente la fonction. Un tel développement sera dit encore développement de Mittag-Leffler ou développement (M).

Remarque. — Chaque terme φ_n de la série (7) est, dans ce dernier cas, linéaire et homogène par rapport à $p_0, p_1, \ldots, p_n$ [formes homogènes en z, u, v de degré $0, 1, \ldots, n$ et termes successifs de la série de Mac-Laurin qui définit $f(z, u, v)$].

Supposons que la fonction $f(z, u, v)$ vérifie une équation aux dérivées partielles d'ordre k, linéaire et homogène par rapport aux dérivées d'ordre k et à coefficients constants [1]. Chaque polynome p_n vérifie cette même équation, par suite φ_n. La fonction $f(z, u, v)$ est alors développée, dans toute l'étoile, en une série de polynomes dont chacun vérifie l'équation aux dérivées partielles.

4. *Application au domaine réel.* — Ne donnons à z, u, v que des valeurs réelles x, x_1, x_2. Le système de valeurs (x, x_1, x_2) définit alors un point de l'espace *réel* (à trois dimensions) Oxx_1x_2.

---

[1] La remarque subsiste si les coefficients sont des polynomes homogènes et de même degré en z, u, v.

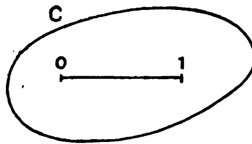
Les points réels de l'étoile A épuisent tout cet espace Oxx_1x_2, *exception faite des points situés sur les demi-droites issues des points réels singuliers* μ *de* $f(x, x_1, x_2)$ *et qui prolongent* $O\mu$ *au delà du point* μ. D'une façon précise, les points μ (sommets de l'étoile réelle) seront les points réels tels que $f(x, x_1, x_2)$ soit prolongeable régulièrement le long du segment réel $O\mu$ jusqu'au point μ *exclusivement*.

Par exemple, supposons que $f(x, x_1, x_2)$ soit une fonction *harmonique* de x, x_1, x_2, n'admettant dans l'espace réel $O\,x\,x_1\,x_2$, comme singularités, que des pôles isolés; un développement (M) de $f(x, x_1, x_2)$ représentera f dans tout l'espace réel sauf sur les demi-droites issues des pôles et menées en sens inverse de l'origine; les termes du développement seront des polynomes *harmoniques*.

Mais les considérations précédentes supposent qu'on connaisse une série génératrice, et notamment une série génératrice normale. Toute la difficulté est maintenant de former une telle série.

5. *Formation théorique d'une série génératrice normale.* — Traçons, dans le plan complexe des t, le segment de l'axe réel compris entre les points $t = 0$ et $t = 1$, et une courbe fermée C renfermant ce segment à son intérieur. Effectuons la représentation conforme de l'aire de C sur un cercle Γ du plan des τ ayant l'origine pour centre : parmi toutes ces représentations il en

Fig. 2.



existe une (et une seule) telle que le point $t = 0$ corresponde au point $\tau = 0$, et le point $t = 1$ au point $\tau = 1$. Le cercle Γ, dans ces conditions, a un certain rayon bien déterminé $\rho > 1$. Soit $t = \psi(\tau)$ et $\tau = \chi(t)$ la correspondance conforme ainsi choisie.

Considérons maintenant une fonction analytique $f(t)$, holomorphe dans l'aire C (contour compris) et dont le module, par suite, reste inférieur dans C à une quantité fixe H. Si nous rem-

plaçons t par $\psi(\tau)$, la fonction $f[\psi(\tau)] \equiv F(\tau)$ est holomorphe dans le cercle Γ et son module n'y dépasse pas H. Elle est donc développable, dans Γ, en série de Mac-Laurin,

$$(9) \qquad F(\tau) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \ldots + A_n\tau^n + \ldots;$$

en particulier, pour $\tau = 1$, cette série converge et représente $F(1)$, c'est-à-dire $f(1)$ (puisque $t = 1$ pour $\tau = 1$). On a donc

$$(10) \qquad f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$

et le reste de cette série $R_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots$ est (d'après une formule classique) inférieur à $\dfrac{H}{\rho^n(\rho - 1)}$.

De plus, les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n \ldots$, sont linéaires et homogènes par rapport à $a_0, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ [coefficients de la série de Mac-Laurin (1) qui définit $f(t)$ pour t voisin de zéro]. En effet, la fonction $t = \psi(\tau)$ peut se développer ainsi :

$$(11) \quad t = \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \ldots + \lambda_n\tau^n + \ldots, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \text{numériques});$$

or, dans la série (1)

$$(1) \qquad f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

remplaçons la variable t par le développement (11) et ordonnons suivant les puissances de τ; la nouvelle série ainsi obtenue

$$a_0 + \lambda_1 a_1 \tau + (\lambda_2 a_1 + \lambda_1^2 a_2)\tau^2 + \ldots$$

doit coïncider avec la série (9), d'où les égalités

$$A_0 = a_0, \qquad A_1 = \lambda_1 a_1, \qquad A_2 = \lambda_2 a_1 + \lambda_1^2 a_2, \qquad \ldots;$$

d'une manière générale, A_n est une combinaison linéaire et homogène de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

6. Ceci posé, donnons-nous une fois pour toutes (dans le plan des t) une suite de courbes fermées $C_1, C_2, \ldots, C_j, \ldots$, *entourant le segment de l'axe réel* $0 - 1$ *et tendant à se réduire à ce segment quand l'entier j croît indéfiniment*. On peut répéter sur la représentation conforme de chaque aire C_j ce que nous venons de dire au sujet de l'aire C; à chaque valeur de l'entier j correspond ainsi un nombre $\rho_j > 1$ (rayon du cercle Γ_j); remar-

quons immédiatement qu'on peut, pour chaque valeur de j, trouver un entier n assez grand pour que la quantité $\frac{1}{\rho_j^n(\rho_j - 1)}$ soit inférieure à $\frac{1}{j^2}$: soit $n = N_j$ la plus petite valeur de n qui satisfait à cette inégalité (1).

Considérons maintenant une fonction quelconque $f(t)$ holomorphe pour $0 \leqq t \leqq 1$. Cette fonction est, par suite, holomorphe (et de module moindre qu'une certaine quantité H) dans une aire C (suffisamment aplatie) entourant le segment réel $0 - 1$. Formons, pour cette fonction f, le développement analogue à (10) qui correspond à chaque courbe C_j.

Dès que j dépasse un certain entier k, la courbe C_j est intérieure à l'aire C. Le développement correspondant converge donc vers $f(1)$: arrêtons-le après le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, il représente $f(1)$ avec une erreur moindre en module que $\frac{H}{\rho_j^n(\rho_j - 1)}$, c'est-à-dire moindre que $\frac{M}{j^2}$ (si l'on prend $n = N_j$). Désignons par ϖ_j le développement ainsi limité, c'est-à-dire la somme des $n = N_j$ premiers termes du développement (10), qui correspond à C_j; cette somme ϖ_j est de la forme

$$(12) \qquad \varpi_j = a_0 + \mu_{1,j}\, a_1 + \mu_{2,j}\, a_2 + \ldots + \mu_{n,j}\, a_n$$

(les coefficients numériques μ dépendant de j, ainsi que l'entier $n = N_j$). Enfin convenons de prendre $\varpi_0 = a_0$.

Posons maintenant :

$$(13) \qquad \varphi_0 = \varpi_0 = a_0, \qquad \varphi_1 = \varpi_1 - \varpi_0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_j = \varpi_j - \varpi_{j-1};$$

je dis que *la série*

$$(14) \quad S = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_j + \ldots = a_0 + \sum_{j=1}^{j=\infty} (\nu_{1,j}\, a_1 + \ldots + \nu_{n,j}\, a_n)$$

est une série génératrice normale.

1° Elle converge (et converge même absolument) vers $f(1)$

(1) Il serait loisible de remplacer, dans le raisonnement, $\frac{1}{j^2}$ par n'importe quelle quantité positive m_j, sous la seule condition que la série $\sum_{j=1}^{j=\infty} m_j$ soit convergente.

quel que soit $f(t)$, *pourvu que $f(t)$ soit holomorphe pour* $0 \leqq t \leqq 1$. En effet, la somme des $(j+1)$ premiers termes de S n'est autre chose que ϖ_j, et, du moment que $f(t)$ satisfait à la restriction énoncée, $|f(1)-\varpi_j|$ est $< \frac{H}{j^2}$, quand j dépasse une certaine limite k. La série S converge donc vers $f(1)$ et elle converge *absolument;* car $|\varphi_j|$ est $< \frac{2H}{j^2}$, dès que $j > k$.

2° Chaque terme φ_j de S est linéaire et homogène par rapport à $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Il est vrai que l'entier $n = N_j$ peut dépasser j. Mais, en introduisant, entre des termes consécutifs de S, un nombre suffisant de termes nuls (ou se détruisant deux à deux), on peut toujours faire en sorte que le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série ne dépende que de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (pour n arbitraire).

La série S est donc une série génératrice normale.

7. *Remarque.* — Cette série S est bien déterminée par les conventions adoptées, une fois choisie la suite de courbes C_j. Mais on peut se donner arbitrairement cette suite de courbes fermées $C_1, \ldots C_j, \ldots$, sous la seule restriction qu'elles entourent le segment réel $0-1$ et tendent à se réduire à ce segment quand j croît indéfiniment. Il convient évidemment de choisir ces courbes de façon à simplifier autant que possible les termes de la série S, c'est-à-dire le développement (10) attaché à chaque courbe Cj.

Remarquons de plus que le raisonnement du n° 5 suppose seulement que la fonction $t = \psi(\tau)$ soit holomorphe dans le cercle Γ, s'annule avec τ, soit égale à 1 pour $\tau = 1$, et que t varie à l'intérieur de C (ou sur C) quand τ varie dans le cercle Γ. Il n'est nullement indispensable qu'inversement la fonction $\tau = \chi(t)$ soit uniforme et holomorphe dans C. Il sera donc loisible d'attacher à chaque courbe C_j une fonction $t = \psi_j(\tau)$ répondant seulement aux conditions suivantes :

La fonction $t = \psi_j(\tau)$ est holomorphe dans un cercle Γ_j de centre $\tau = 0$ et de rayon > 1; quand τ varie dans Γ_j, t ne sort pas de l'aire C_j; enfin $\psi_j(0) = 0$, et $\psi_j(1) = 1$.

8. *Convergence des séries définies par la série génératrice* (14). — Soit A' une aire limitée, entièrement comprise dans l'étoile A attachée à $f(z)$; la série (M) définie par la série géné-

ratrice (14), à savoir

$$(15)\quad \begin{cases} f(z) = \sum \varphi_n(a_0, a_1 z, \ldots, a_n z^n) \\ \quad = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\nu_{1,n} a_1 z + \nu_{2,n} a_2 z^2 + \ldots + \nu_{n,n} a_n z^n), \end{cases}$$

absolument convergente dans A, *converge uniformément dans* A′.

En effet, considérons une aire limitée A″ entièrement intérieure à A et renfermant A′ à son intérieur. Dans cette aire A″, $|f(z)|$ reste inférieur à une limite fixe H.

D'autre part, la valeur $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ étant donnée, posons $z = z_0 t$, et représentons sur le même plan (rapporté aux mêmes axes) les deux variables complexes z et t. Quand t varie dans une certaine aire (ou sur une certaine courbe) C, z varie dans une aire (ou sur une courbe) semblable, soit C^{z_0} : pour obtenir C^{z_0}, on prend l'homothétique de C par rapport à O, r_0 étant le rapport d'homothétie, et l'on fait tourner cette transformée de l'angle θ_0 autour de O. Prenons notamment, comme aire C, une aire C_j; l'aire $C_j^{z_0}$ renferme à son intérieur le segment $0 - z_0$ et se réduit à ce segment si C_j se réduit au segment réel $0 - 1$. Lorsque z_0 varie dans toute l'aire A′, l'aire $C_j^{z_0}$ balaie un domaine B_j. Si l'aire C_j était réduite au segment réel $0 - 1$, le domaine B_j se réduirait à A′; quand j croît indéfiniment, l'aire B_j tend donc vers l'aire A′, et, par suite, reste intérieure à l'aire A″ dès que j dépasse une certaine limite k. Pour $j > k$, la fonction $f_1(t) = f(z_0 t)$ a donc son module inférieur à H dans l'aire C_j, quelle que soit la position du point z_0 dans l'aire A′. Le reste $R_j(z)$ de la série (15), quand z varie dans A′, est par conséquent moindre (en module) que $\frac{H}{j^2}$ dès que $j > k$. Autrement dit, la série (15) converge *uniformément* dans l'aire A′. C. Q. F. D.

Il est évident que le raisonnement s'étend de lui-même aux fonctions de plusieurs variables, d'où ce théorème :

Les séries (M) *déduites de la série génératrice* (14) *convergent absolument dans toute l'étoile* A *attachée à f, et uniformément dans tout domaine* A′ *entièrement intérieur à* A; *cela, quel que soit le nombre des variables dont dépend f.*

En vertu d'un théorème classique, ces séries sont, par suite, *intégrables* et *dérivables* [1] terme à terme, indéfiniment, dans toute l'étoile A; on peut répéter sur la convergence des séries intégrées et dérivées ce qu'on vient de dire sur la convergence des séries (M) elles-mêmes.

Il résulte de là que le développement d'une fonction $f(z)$ suivant une telle série (M) est *unique*. Précisons ce qu'il faut entendre par là.

D'une manière générale, considérons une série (M), soit

$$(\mathrm{M}) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (\lambda_{0,n} a_0 + \lambda_{1,n} a_1 z + \ldots + \lambda_{n,n} a_n z^n) \equiv (n) \sum \mathrm{P}_n(z),$$

qui converge *uniformément* dans toute aire limitée intérieure à l'étoile A [cela, quelle que soit la fonction $f(z)$ définie, dans le voisinage de l'origine, par la série entière $a_0 + a_1 z + \ldots$].

Remarquons d'abord que les séries numériques

$$\lambda_{0,0} + \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} + \ldots, \qquad \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \ldots,$$
$$\lambda_{2,2} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4} + \ldots, \qquad \ldots$$

convergent toutes *vers l'unité*. En effet, faisons $z = 0$ dans l'égalité $f(z) = \sum \mathrm{P}_n(z)$ et les égalités dérivées; il vient

$$a_0 = a_0(\lambda_{0,0} + \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} + \ldots), \qquad a_1 = a_1(\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \ldots), \qquad \ldots.$$

Ceci posé, donnons, dans la série (M), aux constantes $a_0, a_1, \ldots$ des valeurs quelconques et admettons que la série converge *uni-*

---

[1] Soit (M′) la série obtenue en dérivant terme à terme une série (M) qui représente $f(z)$, et soit (M^1) la série qu'on obtiendrait en appliquant directement à $f'(z)$ le développement (M); en général, les deux séries (M′) et (M^1) sont différentes. Pour qu'elles coïncident quel que soit $f(z)$, il faut : 1° que le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme $\mathrm{P}_n(z)$ de la série (M) soit un polynome de degré n,

$$\mathrm{P}_n(z) = \lambda_{0,n} a_0 + \lambda_{1,n} a_1 z + \ldots + \lambda_{n,n} a_n z^n;$$

2° qu'on ait

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{0,(n-1)}, \qquad 2\lambda_{2,n} = \lambda_{1,(n-1)}, \qquad \ldots, \qquad n\lambda_{n,n} = \lambda_{(n-1),(n-1)}.$$

Ces conditions de récurrence permettent de se donner arbitrairement les seuls coefficients $\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \ldots, \lambda_{0,n}, \ldots$, dont la somme doit être égale à 1. Ces coefficients une fois choisis, les autres λ sont déterminés. Peut-on choisir ces coefficients, de façon que la série $\sum \mathrm{P}_n(z)$ soit une série (M)? Tel est le problème, non résolu à ma connaissance, auquel revient la question de savoir s'il existe des séries (M) telles que les deux séries (M′) et (M^1) coïncident quel que soit $f(z)$.

formément dans une aire comprenant l'origine : sa somme est alors une certaine fonction $F(z)$ holomorphe dans cette aire; soit $F(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ le développement de $F(z)$ en série de Mac-Laurin. La proposition que je veux établir, c'est que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *coïncident respectivement avec* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ et que la série considérée n'est autre, par suite, que la série normale (M) attachée à $F(z)$ et convergente dans l'étoile A. Or, c'est ce qui résulte aussitôt de l'égalité $F(z) = \sum P_n(z)$ et des égalités dérivées, où l'on fait $z = 0$; il vient, en effet,

$$b_0 = b_0(\lambda_{0,0} + \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} + \ldots) = a_0,$$
$$b_1 = a_1(\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \ldots) = a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En particulier, une telle série (M) ne peut converger uniformément vers zéro dans une aire renfermant l'origine sans que toutes les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ soient nulles.

Ces remarques ont évidemment leurs analogues dans le cas de plusieurs variables.

9. *Des séries intermédiaires.* — Appliquons à la fonction

$$f_1(t) = f(zt)$$

le développement (10) qui correspond à l'aire C du plan des t (n° 5); la série ainsi obtenue n'est autre que le développement de Mac-Laurin de $F_1(\tau) = f[z\psi(\tau)]$, où l'on fait $\tau = 1$, et elle peut s'écrire

$$(16) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (k_{1,n} a_1 z + k_{2,n} a_2 z^2 + \ldots + k_{n,n} a_n z^n), \quad \text{(les } k \text{ const. numériques).}$$

Cette série converge (pour z donné), et converge absolument, si la fonction $F_1(\tau)$ est holomorphe dans le cercle γ de centre $\tau = 0$ et de rayon 1 (circonférence comprise); elle diverge, si $F_1(\tau)$ n'est pas holomorphe à l'intérieur de γ; il y a doute, si $F_1(\tau)$ est holomorphe dans γ mais non sur la circonférence.

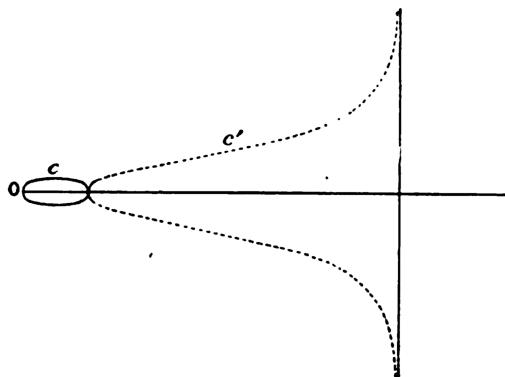
Soit c l'aire du plan des t que la représentation $t = \psi(\tau)$ fait correspondre au cercle γ; cette aire c (intérieure à C) renferme à son intérieur le point $t = 0$, et son contour passe par le point $t = 1$. Le domaine de convergence, soit D, de la série (16) est dès lors facile à définir : considérons pour chaque point z_0 l'aire c^{z_0}

déduite de c (n° 8), *aire qui renferme l'origine*. Si, dans cette aire c^{z_0} (*contour compris*), la branche $f(z)$, prolongée analytiquement à partir de l'origine, est holomorphe, la série (16) converge (et converge *absolument*) pour $z = z_0$; si, à *l'intérieur de* c^{z_0}, $f(z)$ présente au moins un point singulier, la série (16) diverge pour $z = z_0$; si $f(z)$ est holomorphe dans l'aire c^{z_0} (*contour exclus*), il y a doute.

Le domaine D tend vers l'étoile A quand c tend à se réduire au segment réel o — 1, car l'aire c^{z_0} tend alors à se réduire au segment de droite o — z_0.

Dans tous les cas, les points-frontières de D sont des points z_1

Fig. 3.



tels que $f(z)$ soit holomorphe dans l'aire c^{z_1}, mais présente sur le contour de c^{z_1} au moins un point singulier, soit $z = \zeta$. Marquons dans le plan tous les points singuliers ζ ainsi obtenus (¹) : si z_1 est un point frontière de D, il existe au moins un point ζ tel qu'on ait $\zeta = z_1 t$ pour une valeur de t appartenant au contour c. Le point ζ étant donné, quelle courbe décrit le point $z_1 = \frac{\zeta}{t}$ quand t parcourt le contour c? C'est le contour c'^{ζ}, si c' désigne (*fig.* 3) le contour obtenu en effectuant, sur le symétrique de c par rapport à l'axe réel, une inversion de pôle O et de puissance 1.

(¹) Si la courbe c est convexe, les points ζ ne sont autres que les sommets de l'étoile A. Mais quand c n'est pas convexe et quand de plus $f(z)$ n'est pas uniforme, certains des points ζ peuvent être distincts des sommets μ de A.

Supposons tracées dans le plan toutes les courbes c'^{ζ}; le contour limite de D est formé entièrement d'arcs de courbes c'^{ζ}, par conséquent, d'arcs semblables à c' ou à des fragments de c'.

Par exemple, si $f(z)$ n'admet dans tout le plan qu'un point singulier $z=1$, le domaine D est le domaine situé du même côté de c' que l'origine. Si l'aire c était réduite au segment réel $0 \smile 1$, la courbe c' se réduirait au segment réel $1 \smile +\infty$. Si l'aire c est une aire très aplatie (renfermant le segment réel $0 \smile 1$), la courbe c' se compose d'une partie très voisine de la demi-droite réelle $1 \smile +\infty$, et d'une partie très éloignée de l'origine (*fig.* 3).

Le raisonnement du numéro précédent permet de démontrer que la série (16), qui converge absolument dans le domaine D, converge uniformément dans tout domaine D′ entièrement intérieur à D.

Ces considérations s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions de plusieurs variables.

10. *Formation explicite d'une série génératrice normale.* — Nous allons former, d'après la méthode précédente, un exemple explicite de série génératrice normale. On sait que la fonction $t=\log\tau$ représente [1] le demi-plan des τ (situé à droite de l'axe imaginaire) sur une bande du plan des t comprise entre deux parallèles à l'axe réel, tracées au-dessus et au-dessous de cet axe à la distance $\frac{\pi}{2}$. La fonction $t=\alpha\log\tau$ (α constante réelle positive ou négative, *voisine de zéro*) représente le même demi-plan sur une bande B du plan des t, de largeur $|\alpha|\pi$, qui admet encore l'axe réel comme diamètre. Enfin, remplaçons, sous le signe log, la variable τ par $(\beta\tau+b)$, β et b désignant des constantes réelles : le demi-plan Π des τ d'abscisses plus grandes que $-\frac{b}{\beta}$ (si $\beta>0$), ou d'abscisses plus petites que $-\frac{b}{\beta}$ (si $\beta<0$), est représenté sur la bande B du plan des t. On peut disposer des constantes β, b, de façon que le cercle $|\tau|\leqq 1$ ou γ fasse partie du demi-plan Π, et qu'aux points $\tau=0$ et $\tau=1$ correspondent respectivement les points $t=0$ et $t=1$. Il faut et il suffit pour

---

[1] Il s'agit, bien entendu, de la branche du logarithme (bien déterminée dans le demi-plan considéré) qui s'annule pour $\tau=1$.

cela qu'on ait

$$b = 1, \qquad \alpha \log(1 + \beta) = 1, \qquad |\beta| < 1;$$

on tire de là $\beta = e^{\frac{1}{\alpha}} - 1$, et $|\beta|$ n'est < 1 pour α voisin de zéro que si α est négatif. En définitive, j'introduis la représentation suivante (où je mets en évidence le signe des constantes)

$$(17) \qquad t = -\alpha \log(1 - \beta\tau), \qquad \text{avec} \qquad \beta = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}$$

(α constante positive).

La branche considérée du logarithme (celle qui s'annule pour $\tau = 0$) est bien déterminée et holomorphe dans le demi-plan Π, et en particulier dans le cercle γ.

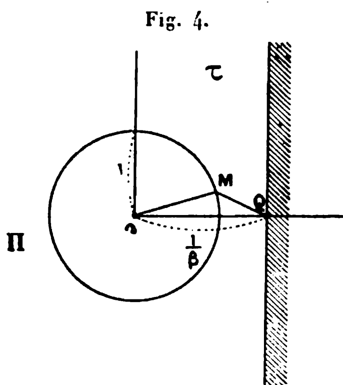
Quel est le domaine c du plan des t qui correspond au cercle γ?

Tout d'abord, ce domaine, symétrique par rapport à l'axe réel, est très aplati sur cet axe, puisqu'il fait partie d'une bande de largeur $\alpha\pi$ qui admet cet axe pour diamètre. Cherchons, d'autre part, ses abscisses maxima et minima : il suffit de chercher le maximum et le minimum de la partie réelle de

$$-\alpha \log(1 - \beta\tau) = -\alpha\left[\log\beta + \log\left(\frac{1}{\beta} - \tau\right)\right],$$

c'est-à-dire le maximum et le minimum du module de $\left(\frac{1}{\beta} - \tau\right)$ quand τ varie dans γ; si l'on marque (*fig.* 4), dans le plan des τ,

Fig. 4.



les points M et Q d'affixes τ et $\frac{1}{\beta}$, $\left|\frac{1}{\beta} - \tau\right|$ est égal à QM; le maximum et le minimum de QM ont lieu pour $\tau = -1$ et $\tau = 1$; l'abscisse maxima cherchée est donc $-\alpha \log(1 - \beta) = 1$ et l'abscisse

minima est $-\alpha\log(1+\beta) = -\alpha\log\left(2 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, qui tend vers zéro avec α. Le domaine tend donc à se réduire au segment réel $0 \smile 1$ quand α tend vers zéro.

Au lieu du cercle γ, considérons un cercle concentrique Γ un peu plus grand, compris encore dans le demi-plan Π. Le rayon ρ de Γ est compris entre 1 et $\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}}$; posons $\rho = 1 + \lambda e^{-\frac{1}{\alpha}}$, et donnons à λ une valeur comprise entre 0 et 1. Le domaine C, du plan des t, qui correspond à Γ sera encore intérieur à la bande B; ses abscisses maxima et minima correspondront à $\tau = \pm\rho$ et seront égales à $-\alpha\log(1 \mp \beta\rho)$.

La quantité $\log(1+\beta\rho)$ est inférieure à $\log 2$ $\left(\text{puisque } \rho < \frac{1}{\beta}\right)$; l'abscisse minima est donc supérieure à $-\alpha\log 2$. D'autre part, on a :

$$\log(1-\beta\rho) = \log\left(1 - \beta - \beta\lambda e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \log\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}(1-\beta\lambda)\right] = -\frac{1}{\alpha} + \log(1-\beta\lambda);$$

l'abscisse maxima $-\alpha\log(1-\beta\rho)$ est donc égale à

$$1 - \alpha\log(1-\beta\lambda),$$

c'est-à-dire inférieure à $1 - \alpha\log(1-\lambda)$, puisque $0 < \beta < 1$. *Si, (comme nous le ferons par la suite), on prend* $\lambda = \frac{1}{2}$, l'aire C est comprise entre les deux abscisses $-\alpha\log 2$ et $1 + \alpha\log 2$ (donc entre les deux abscisses $-\alpha$ et $1+\alpha$) et entre les deux ordonnées $\pm\alpha\frac{\pi}{2}$; cette aire C tend donc à se réduire au segment réel $0 \smile 1$ quand α tend vers zéro.

11. Appliquons maintenant la méthode du n° 5 à la fonction $f(t)$, holomorphe (et de module moindre que H) dans l'aire C; cette fonction est définie par la série de Mac-Laurin :

$$(1)\quad f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \ldots.$$

Si nous remplaçons t par $-\alpha\log(1-\beta\tau)$, la fonction $F(\tau)$ ainsi obtenue est représentable, dans le cercle Γ, par la série de Mac-

Laurin

$$F(\tau) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \ldots,$$

et l'on a

$$f(1) = F(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots;$$

de plus, on sait que

$$|A_0 + A_1 + \ldots + A_n - f(1)|$$

est moindre que

$$\frac{H}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^n \times \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{2}} = \frac{2He^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^n}.$$

Calculons *explicitement* les A_n à l'aide de a_0, a_1, a_2, ... Ceci revient à ordonner, suivant les puissances croissantes de τ, le second membre de l'expression

$$F(\tau) = a_0 - a_1\alpha\log(1-\beta\tau) + \ldots + (-1)^k a_k \alpha^k [\log(1-\beta\tau)]^k + \ldots.$$

Nous pouvons poser

$$(-1)^k[\log(1-\tau)]^k = \tau^k[1 + E_{k+1}^k\tau + E_{k+2}^k\tau^2 + \ldots],$$

les E_{k+l}^k étant des coefficients numériques que nous calculerons tout à l'heure. Le développement de $F(\tau)$ suivant les puissances croissantes de τ s'écrit alors

$$(18)\ \begin{cases} F(\tau) = a_0 + a_1\alpha\beta\tau + \ldots + \beta^n\tau^n \times [\alpha^n a_n + \alpha^{n-1}a_{n-1}E_n^{n-1} + \ldots \\ \qquad + \alpha^l a_l E_n^l + \ldots + \alpha a_1 E_n^1] + \ldots. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_n &= \beta^n(\alpha^n a_n + \alpha^{n-1}a_{n-1}E_n^{n-1} + \ldots + \alpha^l a_l E_n^l + \ldots + \alpha a_1 E_n^1) \\ &\equiv \frac{\beta^n}{n!}[\alpha^n f^{(n)}(0) + \alpha^{n-1}\mathcal{E}_n^{n-1}f^{(n-1)}(0) + \ldots \\ &\qquad + \alpha^l\mathcal{E}_n^l f^{(l)}(0) + \ldots + \alpha\mathcal{E}_n^1 f'(0)], \end{aligned}$$

les $\mathcal{E}$ désignant d'autres coefficients numériques [qui se déduisent des E par la formule $\mathcal{E}_n^{n-j} = n(n-1)\ldots(n-j+1)E_n^{n-j}$].

En particulier, si, pour un instant, on prend comme fonction $f(t)$ la fonction $\frac{1}{1-t}$, le développement (18) s'applique

(pour $|\tau|$ suffisamment petit), et l'on peut écrire

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha\log(1-\tau)} &= 1+\alpha\tau+\ldots \\ &+ \frac{\tau^n}{n!}[n!\,\alpha^n+(n-1)!\,\mathcal{C}_n^{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots \\ &\qquad + l!\,\mathcal{C}_n^l\alpha^l+\ldots+\mathcal{C}_n^1\alpha]+\ldots. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, le coefficient de $\frac{\tau^n}{n!}$, dans cette dernière égalité, n'est autre chose que $D^n_{\tau=0}\left(\frac{1}{1+\alpha\log(1-\tau)}\right)$, en représentant par $D^n_{\tau=0}\varphi(\tau)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$, par rapport à τ, de $\varphi(\tau)$, où l'on fait $\tau=0$.

Il est dès lors facile d'établir entre les $\mathcal{C}_n^{n-j}$ une relation de récurrence qui va nous permettre de représenter très simplement les A_n.

On a, en effet, en posant

$$G(\tau)=1+\alpha\log(1-\tau),$$

$$(20)\qquad D^n_\tau\left(\frac{1}{1+\alpha\log(1-\tau)}\right)=\frac{1}{(1-\tau)^n}\sum_{l=1}^{l=n}\frac{\lambda_l^n\alpha^l}{G^{l+1}}$$

les λ désignant des coefficients numériques; pour le voir, il suffit d'admettre que cette égalité (qui est vraie pour $n=1$) est vraie pour n et de démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$. D'autre part, pour $\tau=0$, on a

$$\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_l^n\alpha^l=n!\,\alpha^n+(n-1)!\,\mathcal{C}_n^{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+l!\,\mathcal{C}_n^l\alpha^l+\ldots+\mathcal{C}_n^1\alpha$$

quel que soit α. D'où l'égalité

$$(21)\quad D^n_\tau\left(\frac{1}{1+\alpha\log(1-\tau)}\right)=\frac{1}{(1-\tau)^n}\sum_{l=1}^{l=n}l!\,\mathcal{C}_n^l\frac{\alpha^l}{G^{l+1}}\qquad (\text{avec } \mathcal{C}_n^n=1).$$

Si l'on dérive membre à membre, il vient (en faisant ensuite $\tau=0$)

$$D^{n+1}_{\tau=0}\left(\frac{1}{1+\alpha\log(1-\tau)}\right)=n\times\sum_{l=1}^{l=n}l!\,\mathcal{C}_n^l\alpha^l+\sum_{l=1}^{l=n}l!\,\mathcal{C}_n^l\times(l+1)\alpha^{l+1};$$

mais le premier membre coïncide (par définition) avec l'expression $\sum_{l=1}^{l=n+1} l!\,\mathcal{C}_{n+1}^{l}\,\alpha^{l}$; d'où, en identifiant les coefficients des puissances de α, la relation de récurrence

$$\mathcal{C}_{n+1}^{l} = n\,\mathcal{C}_{n}^{l} + \mathcal{C}_{n}^{l-1} \qquad (1 < l < n+1),$$

avec $\mathcal{C}_{n}^{n} = 1$, $\mathcal{C}_{n}^{1} = n!$.

Cette relation s'interprète bien simplement, si l'on introduit le polynome

$$(22) \qquad \mathrm{K}_{n}(u) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1).$$

Je dis qu'on peut l'écrire

$$u^{n} + \mathcal{C}_{n}^{n-1}u^{n-1} + \mathcal{C}_{n}^{n-2}u^{n-2} + \ldots + \mathcal{C}_{n}^{1}u.$$

La chose est évidente pour $n = 1$; admettons qu'elle soit vraie pour n, et démontrons-la pour $n+1$; il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{n+1} = (u+n)\mathrm{K}_{n} = u^{n+1} + u^{n}(n + \mathcal{C}_{n}^{n-1}) + \ldots \\ + u^{l}(n\,\mathcal{C}_{n}^{l} + \mathcal{C}_{n}^{l-1}) + \ldots + u.n!\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

En définitive, A_{n} peut recevoir l'expression suivante

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n} = \frac{\beta^{n}}{n!}\,[\alpha^{n}f^{(n)}(0) + \alpha^{n-1}\mathcal{C}_{n}^{n-1}f^{(n-1)}(0) + \ldots \\ + \alpha^{l}\mathcal{C}_{n}^{l}f^{l}(0) + \ldots + \alpha\,\mathcal{C}_{n}^{1}f'(0)],\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_{n}^{l}$ est un entier positif, à savoir le coefficient de u^{l} dans le polynome $\mathrm{K}_{n}(u)$. Sous forme symbolique, on peut écrire encore

$$(23)\ \mathrm{A}_{n} = \frac{\beta^{n}}{n!}\,\mathrm{K}_{n}(\alpha f_{0}') \equiv \frac{\beta^{n}}{n!}\,\alpha f_{0}'(1+\alpha f_{0}')(2+\alpha f_{0}')\ldots(n-1+\alpha f_{0}'),$$

à condition de remplacer (dans le produit effectué) $f_{0}'^{l}$ par $f^{(l)}(0)$.

12. Ceci posé, donnons à α une suite de valeurs tendant vers zéro : soit $\alpha = \frac{2}{\log j}$, j désignant un entier positif qui croîtra indéfiniment. La valeur correspondante de β est $1 - \frac{1}{\sqrt{j}}$. Pour chaque valeur de l'entier j, les domaines c_{j} et C_{j}, qui correspondent aux

cercles γ et Γ $\left(\text{de rayons } 1 \text{ et } 1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\alpha}} = 1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{j}}\right)$, sont bien déterminés et tendent vers le segment réel $0 - 1$ quand j croît indéfiniment; dès que j dépasse une certaine limite k, la fonction $f(t)$ est holomorphe dans C_j et son module y reste inférieur à une certaine quantité H. Dès que j dépasse k, la somme $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ qui correspond à chaque valeur de j, diffère donc de $f(1)$ d'une quantité moindre en module que $\dfrac{2H\sqrt{j}}{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{j}}\right)^n}$.

Cette quantité, *si l'on prend* $n = j$, peut s'écrire $\dfrac{2H\sqrt{j}}{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{j}}\right)^{2\sqrt{j}\times\frac{\sqrt{j}}{2}}}$; pour j très grand (¹), elle est comparable à $\dfrac{2H\sqrt{j}}{e^{\frac{\sqrt{j}}{2}}}$ et moindre par suite que $\dfrac{M}{j^2}$.

Posons donc

$$\varpi_0 = f(0), \qquad \varpi_n = f(0) + \sum_1^n \frac{\beta^l}{l!} K_l(\alpha f'_0),$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{\log n}, \qquad \beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et

$$\varphi_0 = \varpi_0 = f(0), \quad \varphi_1 = \varpi_1 - \varpi_0, \quad \varphi_2 = \varpi_2 - \varpi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n = \varpi_n - \varpi_{n-1}.$$

La série

$$S = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n + \ldots$$

est une série génératrice normale.

Toutes les propriétés énoncées dans le n° 8 s'appliquent en particulier à cette série S. Si on représente par $\varpi_n(z)$ le polynome

---

(¹) La quantité $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h}\log(1+h)} = e^{\frac{1}{h}\left(h-\frac{h^2}{2}+\ldots\right)}$ est $> e^{1-\frac{h}{2}}$ (pour $0 < h < 1$), donc $> e^{\frac{1}{2}}$. L'expression $\dfrac{2H\sqrt{j}}{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{j}}\right)^j}$ est donc moindre que $\dfrac{2H\sqrt{j}}{e^{\frac{\sqrt{j}}{4}}}$ pour $j \geqq 1$.

en z obtenu en remplaçant α par αz dans ϖ_n, et par $P_n(z)$ le polynome $\varpi_n(z) - \varpi_{n-1}(z)$, la série

$$(M_1) \qquad f(0) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots$$

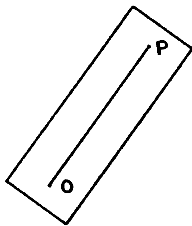
est un développement (M) qui converge absolument vers $f(z)$ dans toute l'étoile, et uniformément dans toute aire intérieure à l'étoile (¹).

Insistons sur la rapidité de la convergence. Soit

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

ou P, un point du plan complexe (*fig.* 5). Enfermons le segment OP dans un rectangle Δ qui admet OP comme diamètre, et

Fig. 5.



dont les côtés perpendiculaires à OP ont comme longueur $\pi\alpha\rho$ et sont distants respectivement de O et de P de la longueur $\alpha\rho$ $\left(\alpha \text{ désignant toujours } \frac{2}{\log n}\right)$. Si, dans le rectangle Δ, $f(z)$ est holomorphe et garde un module inférieur à H, on a

$$(24) \qquad |P_0 + P_1 + \ldots + P_n - f(z)| < \frac{2H\sqrt{n}}{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^n} < \frac{2H\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}.$$

(¹) Les coefficients des $a_k z^k$ dans chaque polynome $\varpi_n(z)$ sont rationnels en $\sqrt{n}$ et $\log n$. Mais on voit aisément que si n remplace $\sqrt{n}$ et $\log n$ par des valeurs rationnelles approchées $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, $\varpi_n(z)$ convergera encore vers $f(z)$, dans l'étoile A, pour $n = \infty$, pourvu que les différences $\left(\sqrt{n} - \frac{p}{q}\right)$ et $\left(\log n - \frac{p'}{q'}\right)$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ suivant une loi suffisamment rapide (indépendante de la fonction f). On peut donc déduire de la série (M_1) une série jouissant des mêmes propriétés, mais où les coefficients des $a_k z^k$, dans chaque polynome P_n, sont des nombres *rationnels*.

Soit B un domaine limité du plan des z, entièrement intérieur à l'étoile A, et B' un domaine limité, intérieur lui aussi à l'étoile, et comprenant B à son intérieur. Soit, d'autre part, B_n le domaine balayé par le rectangle Δ quand z varie dans toute l'aire B; lorsque n croît indéfiniment, B_n tend vers B, et lorsque n dépasse une certaine limite k, B_n reste intérieur à B'. Si H désigne le module maximum de $f(z)$ dans B', *l'inégalité* (24) *a lieu dans toute l'aire* B *dès que n dépasse k*.

13. *Remarques sur le développement précédent.* — Il est loisible, dans le raisonnement précédent, au lieu de prendre $n=j$, de prendre pour n une valeur plus grande que j.

Soit, par exemple, $n=j^2$. Ceci revient à poser

$$\Pi_0=f(0), \qquad \Pi_j(z)=f(0)+\sum_1^{j^2}\frac{\beta^l}{l!}\,K_l(\alpha z f'_0).$$

avec

$$\alpha=\frac{2}{\log j}, \qquad \beta=1-\frac{1}{2\sqrt{j}},$$

et

$$Q_0=\Pi_0=f(0), \qquad Q_1=\Pi_1(z)-\Pi_0, \qquad Q_j(z)=\Pi_j(z)-\Pi_{j-1}(z).$$

La série

$$(m) \qquad f(0)+Q_1(z)+Q_2(z)+\ldots+Q_j(z)+\ldots$$

est une série (M), plus rapidement convergente que la série (M_1) mais à termes plus compliqués. Dans l'aire B, pour la nouvelle série, on aura, en place de l'inégalité (24), l'inégalité

$$(25) \qquad |Q_0+Q_1+\ldots+Q_n-f(z)|<\frac{2H\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{n^2}}<\frac{2H\sqrt{n}}{e^{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4}}}.$$

On peut modifier légèrement cette série (m) de façon que le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme (qui est de degré n^2) renferme z^n en facteur. Considérons, en effet, la fonction

$$f_k(z)=f(z)-a_1z-a_2z^2\ldots-a_kz^k.$$

Puisque la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $z=0$, les coefficients a_j (pour $j\geq 1$) sont moindres en module que $\left(\frac{1}{\rho}\right)^j$, ρ dési-

gnant une quantité convenablement choisie; soient r_1 le module maximum de z dans l'aire B', et R le rapport $\frac{r_1}{\rho}$ (ou l'unité, si ce rapport est < 1). La somme $a_1 z + \ldots + a_k z^k$ est moindre en module dans B' que kR^k; le module de $f_k(z)$, dans B', reste donc inférieur à $H + kR^k$.

Appliquons maintenant le développement (m) à la fonction $f_k(z)$. Il suffit, dans chaque polynome $\Pi_j(z)$, de faire

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0.$$

En particulier, pour $j = k$, le polynome $\Psi_k(z)$ ainsi obtenu, polynome qui renferme en facteur z^{k+1}, vérifie, dans l'aire B, l'inégalité

$$(26) \qquad |f_k(z) - \Psi_k(z)| < \frac{2(H + kR^k)\sqrt{k}}{e^{\frac{k^2}{4}}};$$

lorsque k dépasse H, le second nombre est moindre que

$$\frac{4k^{\frac{3}{2}}R^k}{e^{\frac{k^2}{4}}} = 4k^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R}{e^{\frac{\sqrt{k}}{4}}}\right)^k,$$

quantité plus petite que $\frac{1}{k^2}$ dès que k est suffisamment grand.

Posons alors

$$q_0 = a_0, \quad q_1(z) = a_1 z + \Psi_1(z), \quad q_2(z) = a_2 z^2 + \Psi_2(z) - \Psi_1(z), \quad \ldots,$$
$$q_k(z) = a_k z^k + \Psi_k(z) - \Psi_{k-1}(z), \qquad \ldots.$$

La série

$$(m_1) \qquad a_0 + q_1(z) + \ldots + q_n(z) + \ldots$$

est une série (M), qui converge absolument vers $f(z)$ dans toute l'étoile, et uniformément dans toute aire B intérieure à l'étoile. En effet, la somme $a_0 + q_1(z) + \ldots + q_k(z)$ est égale à

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \Psi_k(z),$$

et par suite, d'après l'inégalité (26), diffère de $f(z)$, dans B, d'une quantité moindre que $\frac{1}{k^2}$, dès que k est suffisamment grand.

Dans la série (m_1), chaque polynome q_n est de degré n^2 et ren-

ferme en facteur z^n; on peut écrire

$$q_n = z^n[\lambda_n a_n + z\lambda_{n+1} a_{n+1} + \ldots + z^{n(n-1)}\lambda_{n^2} a_{n^2}].$$

Chaque dérivée $f^{(n)}(0) = n! a_n$ ne figure donc plus au delà du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme.

La série (M_1), dont nous avons déduit les séries (m) et (m_1), est une des plus simples parmi les séries (M) connues. Elle a été formée, pour la première fois, par M. Fredholm. Mais il est évident que la méthode des nos 5 et 6 permet d'en former une infinité d'autres. Le mode de transformation que nous allons indiquer fournit d'ailleurs le moyen, une série génératrice normale étant connue, d'en déduire aisément de nouvelles [1].

14. *Transformations d'une série génératrice.* — La fonction $f(t)$ étant holomorphe pour $0 \leqq t \leqq 1$, remplaçons-y t par une fonction $g(\theta)$, choisie une fois pour toutes, qui répond aux conditions suivantes : $g(\theta)$ est holomorphe et comprise entre 0 et 1 pour $0 \leqq \theta \leqq 1$; de plus $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La fonction $f_1(\theta) = f[g(\theta)]$ est, elle aussi, holomorphe pour $0 \leqq \theta \leqq 1$. Supposons donnée une série génératrice : soit la série S du no **12**. Si l'on applique ce développement à la fonction $f_1(\theta)$, la série obtenue converge et représente $f_1(1) = f(1)$. Or la série $f_1(\theta)$ est développable en série de Mac-Laurin

$$f_1(\theta) = a_0 + a'_1\theta + a'_2\theta^2 + \ldots,$$

les a'_n étant linéaires et homogènes en $a_1, \ldots, a_n$; à savoir

$$a'_1 = a_1 g'(0), \qquad a'_2 = a_2 g'^2(0) + a_1 g''(0), \ \ldots.$$

En remplaçant $a'_1, a'_2, \ldots$ par ces expressions dans la série S, on obtient une nouvelle série génératrice (qui est normale quand la première série est normale).

---

[1] Dans tout ce qui précède, nous avons considéré l'étoile A de centre 0, et nous nous sommes donné les valeurs, pour $z = 0$, de $f(z)$ et de ses dérivées. Mais il est évidemment loisible de prendre comme point initial, au lieu de l'origine, tout autre point $z = a$ du plan, à condition de remplacer partout z par $z - a$, et $f(0), f'(0), \ldots$, par $f(a), f'(a), \ldots$. La nouvelle série M ainsi formée sera dite *série* (M) *d'origine a*, et elle convergera dans l'étoile A de centre a.

Par exemple, soit $g(\theta) = \theta^k$ (k entier positif). On a

$$f_1(\theta) = a_0 + a_1\theta^k + \ldots + a_n\theta^{kn} + \ldots,$$

c'est-à-dire $a'_1 = 0, \ldots, a'_{k-1} = 0, a'_k = a_1, a'_{k+1} = 0, \ldots$. La nouvelle série génératrice s'obtiendra donc : 1° *en annulant dans la série* S *tous les* a_n *dont l'indice* n *n'est pas un multiple de* k; 2° *en remplaçant ensuite chaque* a_n *où* $n = jk$ *par* a_j.

Pour chaque valeur de k, on déduit ainsi immédiatement de la série S une autre série génératrice. D'un développement (M), par exemple du développement (M_1), on déduit donc un autre développement (M) : 1° en annulant tous les a_n dont l'indice n n'est pas multiple de k; 2° en remplaçant ensuite $a_{jk}z^{jk}$ par $a_j z^j$ (l'entier k est choisi arbitrairement une fois pour toutes).

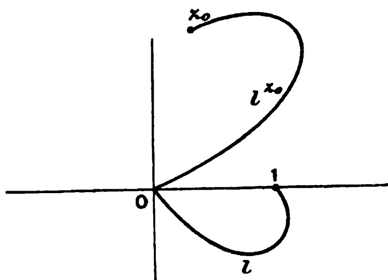
15. Une autre transformation des séries (M), uniformément convergentes dans toute aire intérieure à l'étoile, provient de ce qu'elles sont dérivables et intégrables terme à terme. Supposons connu un développement (M) : soit (M') la série obtenue en dérivant terme à terme la série (M) qui représente $f(z)$, et soit (M^1) la série qu'on obtiendrait en appliquant à $f'(z)$ le développement (M); en général (*voir* p. 111), les deux séries (M') et (M^1) sont différentes. D'après cela, au lieu de développer $f(z)$, développons $f'(z)$ en série (M), puis intégrons terme à terme de o à z et ajoutons a_0. Nous obtenons une nouvelle série (M) qui se déduit de la première en remplaçant partout $a_n z^n$ par $a_{n+1} z^{n+1}$, ($n = 0, 1, 2, \ldots$), et en ajoutant a_0. Plus généralement, en développant $\frac{d^k f}{dz^k}$, on obtiendrait une nouvelle série (M), qui se déduirait de la première en changeant partout $a_n z^n$ en $a_{n+k} z^{n+k}$, et en ajoutant en tête $a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1}$. Si, au lieu de partir de la dérivée de $f(z)$, on part de la primitive de $f(z)$, on voit de même que de la série (M) on peut déduire une autre série (M) : 1° en supprimant les termes en a_0, 2° en remplaçant partout ensuite $a_n z^n$ par $a_{n-1} z^{n-1}$. Plus généralement on peut supprimer dans (M) tous les termes en $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ (k entier donné) et remplacer ensuite partout $a_{n+k} z^{n+k}$ par $a_n z^n$: la nouvelle série ainsi obtenue est encore une série (M).

16. *Transformations imaginaires d'une série génératrice.*

Étoile curviligne. — Dans la fonction $f(t)$, effectuons encore la substitution $t = g(\theta)$, la fonction $g(\theta)$ étant toujours holomorphe pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, égale à 0 pour $\theta = 0$, à 1 pour $\theta = 1$, *mais n'étant plus réelle quand* θ *varie de* 0 à 1.

Quand il en est ainsi, θ variant (par valeurs réelles) de 0 à 1, le point t décrit dans son plan un certain chemin l qui va de $t = 0$ à $t = 1$. Si la fonction $f(t)$ est holomorphe sur l (extrémités comprises), la fonction $f_1(\theta) = f[g(\theta)]$ est holomorphe pour $0 \leqq \theta \leqq 1$; considérons une série génératrice (soit la série S du n° **12**), et formons cette série pour la fonction $f_1(\theta) = a_0 + a'_1\theta + a'_2\theta^2 + \ldots$; le développement ainsi obtenu converge vers $f_1(1) = f(1)$. Mais, d'autre part, a'_1, a'_2, ... sont des combinaisons linéaires et homogènes de a_1, a_2, ... [bien déterminées une fois choisie la substitution $t = g(\theta)$]; de la série génératrice on déduit donc une

Fig. 6.



série de forme analogue, soit (S^l), qui jouit de la propriété suivante : *elle converge et représente* $f(1)$, *quel que soit* $f(t)$ *pourvu que* $f(t)$ *soit holomorphe sur le chemin* l, *extrémités comprises*. Nous donnerons à de telles séries le nom de *séries génératrices d'espèce* l. Si la série dont on est parti est *normale*, il en est de même de la série transformée.

Introduisons maintenant la fonction $f(zt)$, où z est regardé provisoirement comme une constante, et appliquons à cette fonction le développement (S^l). Il suffit de remplacer partout, dans la série (S^l) que nous venons de former, a_n par $a_n z^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). La série ainsi obtenue converge pour $z = z_0$ et représente $f(z_0)$, si, t variant de 0 à 1 *sur* l, la fonction $f(z_0 t)$ est holomorphe; autre-

ment dit, *si la fonction $f(z)$ est prolongeable régulièrement (à partir de $z = 0$) sur le chemin l^{z_0}, jusqu'au point z_0 inclusivement* ([1]).

Considérons l'ensemble de tous les points z_0 du plan pour lesquels cette condition est remplie; nous représenterons par A^l ce domaine, et nous l'appellerons *l'étoile curviligne d'holomorphie* (d'espèce l et de centre O) attachée à la fonction $f(z)$.

Si un point z_0 est exclu de l'étoile, c'est que le chemin l^{z_0} rencontre au moins un point singulier ζ de $f(z)$. Marquons donc, dans le plan des z, tous les points singuliers ζ de $f(z)$ qu'on rencontre en prolongeant $f(z)$ le long de chaque chemin l^{z_0}, c'est-à-dire le long de chaque chemin obtenu en prenant un homothétique de l par rapport à O et en le faisant tourner autour de O. Tous les points z_1 du plan exclus de l'étoile A^l sont tels que $z_1 t$ (pour un certain point t de l) coïncide avec une des valeurs ζ. D'après cela, soit l_1 le transformé de l dans la correspondance $t_1 = \frac{1}{t}$: les points exclus de l'étoile A^l font partie des courbes l_1^ζ.

A chaque série (M) la transformation précédente [une fois choisie la fonction $g(\theta)$] fait correspondre une série de même forme, que j'appellerai *série* (M) *d'espèce* l, ou (pour abréger) série (M^l).

Donnons-nous arbitrairement, dans le plan des t, une courbe l qui joint les points $t = 0$ et $t = 1$, et qui est partout analytique et régulière (extrémités comprises). Soit s l'arc de courbe compté positivement à partir du point $t = 0$ vers le point $t = 1$, soit s_0 la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = 1$, et soit enfin $\theta = \frac{s}{s_0}$. Si nous posons $t = u + iv$, les coordonnées u, v du point t sont des fonctions réelles et holomorphes de θ, $u = g_1(\theta)$, $v = g_2(\theta)$, pour $0 \leqq \theta \leqq 1$. Il suffit de poser

$$t = u + iv = g_1 + ig_2 = g(\theta) \tag{27}$$

pour définir une transformation ([2]) qui déduit de la série (M)

([1]) Pour la notation, voir le n° 8.

([2]) Il est loisible d'ailleurs, le chemin l étant choisi, de remplacer, dans l'égalité (27), θ par $\gamma(\theta)$, la fonction $\gamma(\theta)$ étant holomorphe, *réelle* et comprise entre 0 et 1 pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, et telle de plus que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

donnée [par exemple, de la série (M_1)] une série (M^l), convergente dans l'étoile curviligne A^l, qui correspond à la courbe l.

17. *Exemples.* — Choisissons, comme chemin l, l'arc de la parabole

$$v = hu(u-1) \qquad (h \text{ constante réelle} + \text{ou} -)$$

compris entre l'origine et le point $u=1$, $v=0$. Il suffit de poser ici

$$t = u + iv = \theta[1 + ih(\theta - 1)] \equiv g(\theta)$$

pour obtenir une fonction $g(\theta)$, holomorphe pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, et telle que θ croissant de 0 à 1, le point t parte de l'origine et décrive la parabole donnée jusqu'au point $t=1$. Cette parabole a comme axe la droite $u = \frac{1}{2}$, pour sommet le point $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{h}{4}$, pour paramètre $\frac{1}{2|h|}$. Elle se réduit à l'axe des u quand h s'annule.

Si, dans la fonction

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

on remplace t par $\theta[1 + ih(\theta - 1)] \equiv \theta(c\theta + d)$, il vient

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= a_0 + a_1\theta(c\theta + d) + \ldots + a_n\theta^n(c\theta+d)^n + \ldots \\ &= a_0 + a'_1\theta + \ldots + a'_n\theta^n + \ldots, \end{aligned}$$

en posant

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} a'_n &= a_n d^n + a_{n-1} d^{n-2} c \frac{n-1}{1} + \ldots \\ &= a_n d^n + \sum_j a_{n-j} d^{n-2j} c^j \frac{(n-j)(n-j-1)\ldots(n-2j+1)}{j!} \\ &\quad \left(0 < j \leqq \frac{n}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$d = 1 - ih, \qquad c = ih.$$

Pour fixer les idées, partons de la série (M_1). Il suffit, dans cette série, de remplacer $a_n z^n$ par l'expression

$$a_n z^n d^n + \sum_j a_{n-j} z^{n-j} d^{n-2j} c^j \frac{(n-j)(n-j-1)\ldots(n-2j+1)}{j!} \qquad \left(0 < j \leqq \frac{n}{2}\right),$$

pour obtenir une nouvelle série, soit (μ^l), de forme entièrement analogue, et qui converge dans l'étoile curviligne A^l correspon-

dant à l'arc de parabole l et à la fonction $f(z)$. Le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de cette série est un polynome en z de degré n.

Par exemple, appliquée à la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$, la série (μ^l) représentera cette fonction dans tout le plan, sauf sur l'arc de la cubique : $(v - hu)(u^2 + v^2) + hu^2 = 0$ extérieur au cercle $u^2 + v^2 = 1$.

Il est facile de préciser la convergence de cette série (μ^l). Tout d'abord, il est évident qu'elle converge absolument comme la série (M_1). Pour limiter le reste, il suffit de considérer le module maximum H de la fonction $f_1(\theta) = f[z_0 g(\theta)]$ quand θ varie dans un rectangle Δ qui a l'axe réel pour diamètre, et dont les deux côtés normaux à cet axe ont comme longueur $\pi\alpha$ et pour abscisses $-\alpha$ et $1+\alpha$, $\left(\alpha = \frac{2}{\log n}\right)$. Si l'on arrête la série après le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, le reste R_n de la série est en module moindre que $\frac{2H\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}$ (*voir* le n° **12**, p. 120). D'autre part, au rectangle Δ l'égalité $t = g(\theta)$ fait correspondre une aire D, qui comprend à son intérieur l'arc l de parabole et tend à se réduire à cet arc quand α tend vers zéro. Quel que soit le point θ du rectangle Δ, sa distance minima à un point du segment réel $0 - 1$ est moindre que $\alpha\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} < 2\alpha$; par suite, quel que soit le point t de l'aire D, sa distance minima à un point de l'arc l est moindre que $2\alpha[1 + |h| + 2|h\theta|]$, car on sait que

$$|g(\theta) - g(\theta_0)| = |\theta - \theta_0| \times |g'(\theta_1)|,$$

θ_1 désignant un point convenablement choisi sur le segment rectiligne qui joint θ_0 et θ. Or, dans Δ, on a

$$|g'(\theta)| = |1 + ih(2\theta - 1)| \leqq 1 + |h|(1 + 2|\theta|) \leqq 1 + |h|(3 + 4\alpha).$$

Quand $|h|$ est moindre que 1, ce que nous supposerons par la suite, et α moindre que 1 (c'est-à-dire $n > 8$), la quantité $1 + |h|(3 + 4\alpha)$ est moindre que 7. Dans ces conditions, décrivons, de chaque point de l comme centre, un cercle de rayon 14α, et soit d l'aire du plan ainsi balayée : considérons ensuite l'aire semblable d^{z_0}, qui tend vers l'arc de parabole l^{z_0}, quand n croît indéfiniment. Si z_0 fait partie de l'étoile A^l, la fonction $f(z)$ est holomorphe

dans l'aire d^{z_0} dès que n dépasse une certaine limite k, et son module reste, dans cette aire, inférieur à une certaine quantité H. On a donc, pour $n > k$,

$$|R_n(z_0)| < \frac{2H\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}.$$

Il suit de là presque immédiatement (*voir* p. 110) que la série (μ^l) converge uniformément dans toute aire B dont tous les points (contour compris) appartiennent à A^l. Elle est donc dérivable et intégrable terme à terme indéfiniment dans l'étoile A^l.

18. Au lieu de l'arc de parabole l, considérons le demi-cercle supérieur λ décrit sur le segment $0 - 1$ comme diamètre. On peut prendre, comme transformation correspondante,

$$t = u + iv = \frac{1}{2}(1 - \cos\pi\theta + i\sin\pi\theta) = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\pi\theta}).$$

Si l'on pose encore

$$a_0 + \frac{a_1}{2}(1 - e^{-i\pi\theta}) + \frac{a_2}{2^2}(1 - e^{-i\pi\theta})^2 + \ldots = a_0 + a'_1\theta + a'_2\theta^2 + \ldots,$$

on a

$$a'_n = c_{1,n}a_1 + \ldots + c_{n,n}a_n,$$

les coefficients $c_{j,n}$ ayant des expressions faciles à former et que je n'écris pas pour abréger. Si l'on remplace, dans la série (M_1), les $a_n z^n$ par $(c_{1,n}a_1 z + \ldots + c_{n,n}a_n z^n)$, la série (μ^λ) ainsi obtenue converge vers $f(z)$ dans tout le plan, sauf sur des demi-droites issues de points singuliers ζ de $f(z)$ et faisant avec la direction $O\zeta$ l'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Si, au demi-cercle λ, on substitue le demi-cercle inférieur λ', il suffit, dans ce qui précède, de changer θ en $-\theta$ et l'angle $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$.

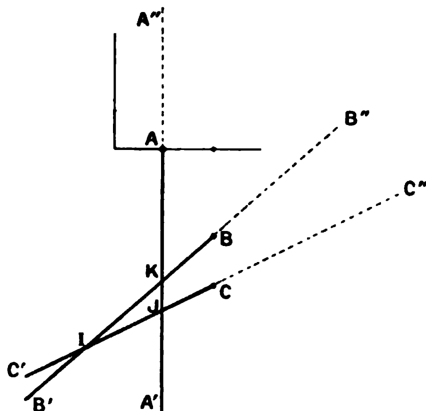
D'une manière générale, soit l' le symétrique de l'arc l par rapport à l'axe réel : pour passer de l à l', il suffit de changer i en $-i$ dans $g(\theta) = g_1(\theta) + ig_2(\theta)$; les deux séries (M^l) et $(M^{l'})$ sont alors *conjuguées* l'une de l'autre : j'entends par là que les

coefficients de $a_n z^n$ (pour n quelconque) sont conjugués dans les termes de même rang de (M^l) et de $(M^{l'})$.

19. *Étoile curviligne attachée à une fonction multiforme.* — Quand la fonction $f(z)$ est uniforme dans tout son domaine d'existence, il n'y a aucune ambiguïté sur la valeur représentée par une série (M^l). Par exemple, la fonction $\frac{1}{1-z}$ est représentée par la série (μ^λ) dans tout le plan sauf sur la demi-droite $x=1$, $y<0$.

Mais, quand la fonction $f(z)$ est multiforme, il convient de préciser : la branche représentée par une série (M^l) en un point z de

Fig. 7.



l'étoile (A^l) est la branche prolongée régulièrement le long du chemin l^z (à partir de l'origine).

Par exemple, soit $f(z)=\sqrt{1-z}$ [avec $f(0)=+1$]; la série (μ^λ), formée pour cette fonction, converge dans le plan sauf sur la demi-droite $x=1$, $y\leqq 0$, qui est une coupure de la branche représentée. Si l'on désigne par $f_1(z)$ la valeur de $f(z)$ prolongée régulièrement le long du vecteur Oz, la série (μ^λ) représente $f_1(z)$, sauf dans le quadrant $x>1, y<0$, où elle représente $-f_1(z)$.

Il peut se faire que les lignes frontières de (A^l) se coupent, de façon à enclore un espace. Il faut bien se garder d'en conclure

que cet espace est exclu de l'étoile. Soit, par exemple,

$$(29)\quad f(z)=\sqrt{(1-z)\left[1-\frac{z}{2(1-i)}\right]\left(1-\frac{z}{2-3i}\right)} \qquad [f(0)=1];$$

la série (μ^λ) converge dans tout le plan sauf sur les trois demi-droites AA′, BB′, CC′ (*fig.* 7); elle représente $f_1(z)$ si le vecteur $\overline{Oz}$ n'est coupé par aucune (ou est coupé par deux) de ces trois demi-droites et elle représente $-f_1(z)$ si le vecteur $\overline{Oz}$ est coupé par une ou trois de ces demi-droites. En particulier, pour tout point z du triangle IJK, la série représente $-f_1(z)$, et le chemin l^z rencontre au moins une des trois demi-droites exceptionnelles.

20. Considérons à la fois les deux séries (μ^λ) et $(\mu^{\lambda'})$, et soit p_n et ϖ_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de ces séries. Désignons par (ν^λ) la série $\sum \frac{p_n+\varpi_n}{2}$. Cette série (où les coefficients des $a_n z^n$ sont *réels*) présente des propriétés remarquables.

Tout d'abord, appliquée à une fonction uniforme, elle représente cette fonction sauf sur les droites normales en chaque point singulier ζ à la droite $O\zeta$. Mais si la fonction est multiforme, elle représentera $f(z)$ dans le voisinage de l'origine, et dans d'autres parties du plan $\frac{f_1+f_2}{2}$ (f_1, f_2 désignant deux branches de f convenablement choisies). C'est ainsi qu'appliquée à la fonction $\sqrt{1-z}$ la série (ν^λ) converge vers $f_1(z)$ dans le demi-plan $x<1$ et vers zéro dans le demi-plan $x>1$. Au contraire, la série $\sum \frac{p_n-\varpi_n}{2}$ converge vers zéro dans le demi-plan $x<1$ (notamment pour $x=0$ et dans le voisinage), et converge vers une des branches (continue) de $\sqrt{1-z}$ dans le demi-plan $x>1$.

De même, appliquée à l'exemple (29), la série (ν^λ) représente zéro dans le triangle IJK (*fig.* 7) et dans les trois angles C′IB′, A″KB″, C″JA′; elle représente $f_1(z)$ dans le domaine du plan (comprenant l'origine) limité par la ligne brisée indéfinie C′IKA″, et une branche continue de $f(z)$ dans les autres portions du plan B″KJC″ et B′IJA′.

Ainsi, *il existe des séries de la forme*

$$n\sum(\lambda_{0,n}a_0+\lambda_{1,n}a_1 z+\ldots+\lambda_{n,n}a_n z^n)$$

qui convergent uniformément vers $f(z)$ dans le voisinage de l'origine [quelle que soit la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

holomorphe à l'origine] et qui, pour certaines fonctions $f(z)$ telles que $\sqrt{1-z}$, convergent uniformément vers zéro dans une autre partie du plan.

Au lieu de la combinaison $\frac{p_n + \varpi_n}{2}$, on aurait pu former aussi bien la combinaison $\frac{ap_n + b\varpi_n}{a+b}$, ($a$, b constantes numériques). Appliquée à $\sqrt{1-z}$, la nouvelle série (ν^λ) ainsi obtenue représenterait $\frac{(a-b)\sqrt{1-z}}{a+b}$ dans le demi-plan $x > 1$.

Enfin, on arriverait à des conclusions analogues en combinant deux séries *conjuguées* (M^l) et ($M^{l'}$) quelconques.

21. *Extension des résultats précédents.* — Nous sommes partis, dans ce qui précède (n° **16**), d'une courbe l joignant les points $t = 0$, $t = 1$ et partout analytique et régulière. *Mais il est loisible de se donner entre* 0 *et* 1 *une courbe continue entièrement quelconque, soit* L. En effet, une telle courbe peut toujours être regardée comme la limite d'une courbe analytique régulière (joignant 0 et 1), qui dépend d'un entier n : quand n croît indéfiniment, cette courbe l_n tend vers L. Pour chaque chemin l, on sait former une série (M^l) représentant $f(z)$ dans l'étoile A^l; quand l tend vers L, A^l tend vers A^L.

Appelons d l'aire balayée par les cercles ayant leur centre sur l_n et de rayon $\frac{1}{n}$: on peut dans la série (M^{l_n}) prendre un nombre de termes assez grand pour que la somme de ces termes, soit $q_n(z)$, diffère de $f(z)$ d'une quantité moindre que $\frac{H}{n^2}$, sous la seule condition que la fonction $f(z)$, d'ailleurs quelconque, soit holomorphe et de module inférieur à H dans d^z. Ceci posé, je dis que *la série :* $q_1 + (q_2 - q_1) + (q_3 - q_2) + \ldots$ *est une série* (M^L) : en effet, soit z un point de l'étoile A^L et B une aire renfermant à son intérieur le chemin L^z, aire dans laquelle $f(z)$ est holomorphe et de module inférieur à une quantité finie H. Dès que n dépasse

une certaine limite k, le chemin l_n^z et l'aire d^z correspondante, étant très voisins de L^z, sont intérieurs à B, et l'on a $|f(z) - q_n(z)| < \frac{H}{n^2}$. La série : $q_1 + (q_2 - q_1) + (q_3 - q_2) + \ldots$ converge donc *absolument* dans l'étoile A^L vers $f(z)$ [c'est-à-dire vers la branche de $f(z)$ prolongée le long de L^z].

Il résulte aussitôt du raisonnement qu'elle converge uniformément dans toute aire intérieure à cette étoile. C. Q. F. D.

Par exemple, prenons pour L la spirale logarithmique $\rho = e^{h\omega}$ (ρ et ω coordonnées polaires de $t = u + iv$; h const. > 0). Pour $\omega = 0$, ρ est égal à 1; pour $\omega = -\infty$, ρ est nul; l'origine est un point asymptotique. Nous poserons :

$$t = u + iv = \frac{1}{1 - e^{-n}} (e^{n(\theta-1)} - e^{-n}) e^{\frac{in(\theta-1)}{h}};$$

quand θ croît de 0 à 1, par valeurs réelles, t décrit un arc de spirale l_n du point $t = 0$ au point $t = 1$; cette spirale l_n, qui est définie par l'égalité : $t + \frac{e^{-n}}{1 - e^{-n}} = e^{h\omega} \times e^{i\omega}$, est une spirale semblable à L, ayant comme point asymptote le point $t = \frac{-e^{-n}}{1 - e^{-n}}$, et qui tend vers L quand n croît indéfiniment.

L'étoile A^L qui correspond à la spirale L est intéressante parce que deux lignes frontières de l'étoile ne se coupent jamais, et cela quelles que soient les singularités de $f(z)$. La spirale L (en particulier la droite 0 — 1) est la seule courbe qui réponde à cette condition ([1]).

22. Indiquons rapidement une autre généralisation. Partons de l'égalité

$$z = \rho(z_0, t)$$

([1]) En effet, soit L' la transformée de L dans la substitution $t = \frac{1}{t_1}$; les courbes L'^z (qui dépendent des deux paramètres réels x, y, si $z = x + iy$) se coupent et par chaque point de l'espace il en passe une infinité, à moins que toutes les courbes L'^z passant par un point arbitraire P ne se confondent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la courbe L' admette une transformation continue en elle-même de l'espèce : $\rho_1 = k\rho$, $\omega_1 = \omega + h$. Or les seules courbes jouissant de cette propriété sont des spirales logarithmiques de foyer O (en particulier les cercles de centre O et les droites issues de O); les inverses de ces courbes sont des courbes de même espèce. Les cercles sont à écarter puisque L doit passer par l'origine.

où ρ désigne une fonction entière de z_0 et une fonction holomorphe de t pour t réel et compris entre o et 1 $(0 \leqq t \leqq 1)$; de plus, cette fonction s'annule avec t et est égale à z_0 pour $t = 1$. Quand t croît de o à 1, z décrit une courbe bien déterminée, soit l_{z_0}, de o à z_0. Par exemple, soit $\rho = t[z_0 + (t-1)z_0^2]$: la courbe l_{z_0} est une parabole facile à définir géométriquement.

Introduisons maintenant la fonction $F(t) = f(z) \equiv f[\rho(z_0, t)]$; si $f(z)$ est holomorphe le long du chemin l_{z_0} (extrémités comprises), $F(t)$ est holomorphe dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, et $F(1)$ ou $f(z_0)$ est représentée par la série génératrice normale S du n° **12** (ou par toute autre); posons encore

$$F(t) = a_0 + a'_1 t + a'_2 t^2 + \ldots;$$

on a

$$\rho(z, t) = t\rho'_t(z, 0) + \frac{t^2}{2}\rho''_{t^2}(z, 0) + \ldots = t\rho_1(z) + t^2\rho_2(z) + \ldots,$$

les $\rho_j(z)$ désignant des fonctions entières de z (des polynomes si ρ est un polynome en z). D'où

$$\begin{aligned} f[\rho(z_0, t)] &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots \\ &= a_0 + a_1\rho_1(z_0)t + (a_1\rho_2 + a_2\rho_1^2)t^2 + \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a'_1 = a_1\rho_1(z_0), \qquad a'_2 = a_1\rho_2(z_0) + a_2\rho_1^2(z_0), \qquad \ldots;$$

d'une façon générale, a'_n est une combinaison linéaire et homogène de $a_1, \ldots, a_n$, dont les coefficients sont des fonctions entières connues de z_0. Il suffit de remplacer les a'_n par ces expressions dans la série S pour obtenir une série de la forme

$$(30) \qquad a_0 + (n)\sum[a_1 r_{1,n}(z_0) + a_2 r_{2,n}(z_0) + \ldots + a_n r_{n,n}(z_0)],$$

où les r sont des fonctions entières connues de z_0; cette série converge vers $f(z_0)$ si $f(z)$ est holomorphe le long du chemin l_{z_0}. Les points exclus de cette nouvelle étoile de convergence sont donc les points ζ tels que sur le chemin l_ζ on rencontre une singularité de la fonction $f(z)$ prolongée.

Il serait aisé d'étendre ces résultats (convenablement modifiés) au cas où la fonction $\rho(z, t)$ ne serait pas entière en z. Je veux seulement indiquer ici un problème qui se pose à ce sujet : à chaque point z du plan des z, attachons un chemin bien déterminé l_z allant de l'origine à z et qui varie d'une façon continue

avec z. Existe-t-il une série répondant aux conditions suivantes : 1° son $n^{\text{ième}}$ terme est linéaire et homogène en $a_0, a_1, \ldots, a_n$, les coefficients étant des fonctions connues de z; 2° elle converge vers $f(z)$ [quelle que soit la fonction $f(z)$] pourvu que sur le chemin l_z la fonction $f(z)$ soit prolongeable régulièrement jusqu'au point z inclusivement ?

D'après ce qui précède, on peut choisir *des* chemins l_z tels que la réponse soit affirmative. Mais peut-on les choisir arbitrairement ou, sinon, quelles conditions doivent-ils remplir? Ce sont là des questions non encore résolues.

23. *Application aux fonctions réelles.* — Restreignons-nous, pour un instant, aux valeurs réelles x de la variable. Quand nous développons $f(x)$ en série (M^l), la série converge si $f(z)$ est holomorphe le long du chemin l^x, et représente la valeur de f avec laquelle on arrive en x en prolongeant analytiquement $f(z)$ (à partir de $z = 0$) le long de l^x.

Imaginons, plus généralement, *qu'à chaque point x_0 on fasse correspondre un chemin $l(x_0)$ joignant x_0 à l'origine, chemin qui soit analytique et régulier (extrémités comprises) pour chaque valeur de x_0, et qui varie avec x_0 d'une façon analytique et régulière* ([1]). Autrement dit, soient s l'arc de ce chemin compté à partir de O vers x_0, et $\sigma(x_0)$ sa longueur totale; les coordonnées x, y d'un point du chemin sont des fonctions holomorphes de s et de x_0 pour tout couple s, x_0 tel qu'on ait $0 \leqq s \leqq \sigma(x_0)$; $\sigma(x_0)$ est une fonction holomorphe pour toutes les valeurs réelles de x_0 et, si l'on pose $\frac{s}{\sigma(x_0)} = t$, x et y sont des fonctions holomorphes de t et de x_0, quel que soit x_0, pour $0 \leqq t \leqq 1$. Il suffit alors de poser

$$x + iy = \rho(x_0, t)$$

pour obtenir (comme au numéro précédent) une série de la forme (30), où les $r_{j,k}$ sont des fonctions connues ([2]) de x holo-

([1]) Il serait facile de lever ces restrictions comme au n° 21; on peut se donner arbitrairement le chemin $l(x_0)$ sous la condition qu'il soit continu et varie avec x_0 d'une manière continue.

([2]) Ces fonctions r sont indépendantes de f et ne dépendent que de la famille choisie de chemins $l(x)$; ce sont des combinaisons entières de

$$\rho'_t(x_0, 0),\ \rho''_{t^2}(x_0, 0),\ \ldots.$$

morphes pour x réel : *cette série converge si, le long de $l(x_0)$, $f(x)$ est holomorphe, et elle représente la valeur de f prolongée jusqu'en x_0 sur ce chemin.*

24. Supposons notamment que la fonction $f(z)$ soit uniforme et ait toutes ses singularités réelles; chaque série (M^l) représentera $f(x)$ pour toutes les valeurs de x (les valeurs singulières exceptées), et elle sera dérivable terme à terme indéfiniment : la série et les séries dérivées convergent uniformément sur tout segment de l'axe réel qui ne comprend pas de point singulier.

Si la fonction, toujours uniforme, est holomorphe dans un certain angle xOA et dans l'angle prolongé, il suffit de prendre comme chemin l un arc intérieur à cet angle pour que la série (M^l) correspondante jouisse encore des propriétés énoncées.

Quand la fonction $f(z)$ n'est plus uniforme, distinguons les valeurs de $f(z)$ *à droite* et *à gauche* de la demi-droite Ox. Considérons un petit angle *positif* xOA et prolongeons $f(z)$ dans ce petit angle : nous dirons que nous étudions $f(z)$ *à droite* de Ox, et nous représenterons par $f_d(z)$ la fonction ainsi prolongée (fonction en général multiforme). Le point P étant donné sur Ox, décrivons de O comme centre un cercle de rayon $\overline{\mathrm{OP}}$; si $f_d(z)$ est uniforme (ou holomorphe) à l'intérieur de ce cercle et de l'angle xOA (pris suffisamment petit), nous convenons de dire que $f(z)$ est *uniforme (ou holomorphe) à droite de* Ox *jusqu'au point* P; dans ce cas, la valeur de $f_d(z)$ est bien déterminée en tout point x de OP [non singulier pour $f_d(z)$] : c'est, par définition, la valeur de *f du côté droit de* Ox.

Les valeurs de *f à gauche* de Ox, soit $f_g(z)$, se définissent de la même manière en considérant un petit angle xOB *négatif* (¹). Remarquons que si la fonction $f_d(z)$ est uniforme à droite de OP, et ne présente sur OP que des points singuliers isolés *non critiques*, $f_d(z)$ coïncide sur OP avec $f_g(z)$. Au contraire, il peut arriver que $f_d(z)$ ne présente sur OP d'autres singularités que des

(¹) Il est évident que ces définitions s'appliquent d'elles-mêmes à une demi-droite quelconque issue de l'origine, et en particulier à l'axe réel négatif.

points critiques algébriques, tandis que $f_g(z)$ présente sur OP des singularités transcendantes ([1]).

J'ai insisté sur cette terminologie parce qu'elle nous servira plus loin. Admettons maintenant que $f(z)$ soit holomorphe dans un certain angle positif xOA : la série (M^l) représentera $f_d(x)$ en tout point x non singulier pour $f_d(x)$, du moment que l'arc l aura été choisi intérieur à l'angle xOA. Soit l' le chemin symétrique de l par rapport à Ox, et (M$^{l'}$) la série conjuguée de (M^l) (n° 18) : la série (M$^{l'}$) représente $f_g(x)$, si $f(z)$ est holomorphe dans l'angle xOB (symétrique de xOA).

25. Considérons en particulier une fonction $f(z)$ qui n'ait d'autre point singulier que le point $z = 1$ autour duquel deux valeurs seulement de $f(z)$ se permutent. Les séries (M^l) et (M$^{l'}$) convergent sur l'axe Ox sauf pour $x = 1$ et représentent respectivement $f_d(x)$ et $f_g(x)$.

Si l'on ajoute terme à terme les deux séries (M^l) et (M$^{l'}$), multipliées respectivement par $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$, la nouvelle série (N^l) représente $f(x)$ pour $x < 1$ et $\frac{af_d(x)+bf_g(x)}{a+b}$ pour $x > 1$.

Faisons notamment $a = b$; la série $\frac{(\mathrm{M}^l)+(\mathrm{M}^{l'})}{2}$ représente $f(x)$ pour $x < 1$ et $\frac{f_d(x)+f_g(x)}{2}$ pour $x > 1$; comme $f(z)$ n'a que deux branches, soit f et f_1, $f+f_1$ est une fonction uniforme F(z) et $\frac{f_d(x)+f_g(x)}{2}$ n'est autre chose que $\frac{\mathrm{F}(x)}{2}$; la nouvelle série représente donc une fonction à deux branches pour $x < 1$ et une fonction uniforme pour $x > 1$. Remarquons que si $f(x)$ est réelle (pour x voisin de o), a_0, a_1, a_2, ... sont réels et la série (M^l) + (M$^{l'}$) a ses termes réels pour z réel.

C'est ainsi que la série $\frac{(\mu^l)+(\mu^{l'})}{2}$, appliquée à $\sqrt{1-x}$, représente $\sqrt{1-x}$ pour $x < 1$, et o pour $x > 1$.

([1]) *Exemple* : $f(z) = e^{\frac{1}{+\sqrt{1-z}-i}}$ (où $+\sqrt{1-z} = 1$ pour $z = 0$); sur Ox, la branche $f_d(z)$ n'a qu'un point singulier (point critique algébrique) $z = 1$; tandis que $f_g(z)$ a en outre un point essentiel $z = 2$.

Les séries (M^l), $(M^{l'})$, (N^l) convergent ici uniformément et absolument sur tout segment de l'axe réel qui ne renferme pas $x = 1$, et il en est de même pour les séries dérivées. Appelons $G(x)$ la fonction définie pour x quelconque ($\neq 1$) par la série $N^l(x)$. La fonction $G(x)$ a des dérivées de tout ordre sauf pour $x = 1$. Formons, pour cette fonction, la série (N^l), *mais en prenant* x_0 *comme origine* (*voir* la note (¹), p. 125). Si $x_0 < 1$, $G(x)$ coïncide avec $f(x)$ pour x voisin de x_0, et la nouvelle série N^l (d'origine x_0) représente, comme la première, la fonction $G(x)$ tout le long de l'axe des x (le point $x = 1$ étant toujours excepté). Si $x_0 > 1$, $G(x)$ coïncide (pour x voisin de x_0) avec $\frac{af_d(x) + bf_g(x)}{a+b}$; la série (M^l), d'origine x_0, représente $G(x)$ pour $x > 1$, et $G_1(x)$ pour $x < 1$, $G_1(x)$ désignant la valeur obtenue en prolongeant $G(x)$ de $x_0 > 1$ à $x < 1$ *au-dessous de l'axe des x*. Or, quand on prolonge $f(x)$ de $x < 1$ à $x_0 > 1$ au-dessus de Ox, on arrive en x_0 avec la valeur $f_d(x_0)$; si, partant de x_0 avec cette valeur, on chemine au-dessous de l'axe des x, on revient en $x < 1$ avec la valeur $f_1(x)$. Il suit de là que $G_1(x) \equiv \frac{af_1 + bf}{a+b}$, et que les séries (M^l), $(M^{l'})$, d'origine $x_0 > 1$, représentent respectivement $\frac{af_1 + bf}{a+b}$, $\frac{af + bf_1}{a+b}$ pour $x < 1$; la série (N^l) d'origine $x_0 > 1$ représente donc $\frac{a(af_1 + bf) + b(af + bf_1)}{(a+b)^2}$ pour $x < 1$. Cette dernière expression diffère en général de $f(x)$. Mais peut-on choisir a et b de façon qu'elle coïncide avec $f(x)$, quelle que soit la fonction f (à deux branches)? Il faut et il suffit pour cela qu'on ait : $a^2 + b^2 = 0$, $2ab = (a+b)^2$, c'est-à-dire $b = \pm ia$. Représentons par (N_1^l) la combinaison $(M^l) + i(M^{l'})$; la série (N_1^l) jouit, d'après ce qui précède, des propriétés suivantes : *elle converge quel que soit* x, *sauf pour* $x = 1$, *et elle converge absolument et uniformément, ainsi que les séries dérivées, sur tout segment de l'axe réel qui ne renferme pas le point* $x = 1$; *sa somme* $G(x)$ *coïncide avec* $f(x)$ *pour* $x < 1$ *et avec* $\frac{f_d(x) + if_g(x)}{1+i}$ *pour* $x > 1$. *Si l'on forme, pour la fonction* $G(x)$, *la série* (N_1^l), *d'origine* $x_0 \neq 1$, *cette série jouit de toutes les propriétés de la première et représente comme elle la fonction* $G(x)$ *tout le long de l'axe des* x (*le point* $x = 1$ *étant toujours excepté*) : cela,

quelle que soit la fonction $f(x)$, pourvu que cette fonction n'ait que deux branches et n'admette que le point singulier $x = 1$.

Ce résultat est remarquable, si l'on réfléchit que $G(x)$ coïncide (suivant que x est > 1 ou < 1) avec *deux fonctions analytiques différentes* (¹).

Par exemple, appliquée à $f(z) = \sqrt{1-z}$, la série (N_1^l) représente $\sqrt{1-x}$ pour $x < 1$, et $\sqrt{x-1}$ pour $x > 1$.

26. *Séries* (M) *qui convergent sur les droites frontières.* — En se servant des séries (M^l), on peut former des séries (M) qui convergent non seulement dans l'étoile A, mais encore sur les demi-droites frontières, pourvu que les points singuliers dont ces droites sont issues satisfassent à certaines conditions très générales que nous allons préciser.

Considérons, en effet, une série (M^l), par exemple la série (μ^l) du n° 17, qui correspond (²) à l'arc l de parabole

$$v = -hu(u-1) \qquad (h > 0),$$

compris entre les poins $t = u + iv = 0$ et $t = 1$. La somme S_n des $(n+1)$ premiers termes de la série (μ^l) diffère de $f(z)$ d'une quantité moindre en module que $\frac{2H\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}$, si $f(z)$ est holomorphe et de module inférieur à H dans l'aire d^α $\left(\text{déduite de l'aire } d \text{ balayée par les cercles de rayon } 14\alpha = \frac{28}{\log n} \text{ dont les centres décrivent } l\right)$: cela, quelle que soit la constante h, de module moindre que 1.

Ceci rappelé, adoptons, pour chaque valeur de l'entier n, une valeur de h *qui tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *mais infiniment plus*

(¹) On peut former des exemples où la série (N_1^l) jouit de toutes les propriétés précédentes et de plus converge absolument et uniformément sur tout segment de l'axe des x ainsi que les séries dérivées. Mais, pour $x = 1$, la fonction $G(x)$ est nulle ainsi que toutes ses dérivées et la série (N_1^l) d'origine 1, au lieu de représenter $G(x)$, est identiquement nulle.

(²) On pourrait partir de n'importe quelle série (M^l), sous la seule restriction que le chemin l ne traverse pas l'axe des x. Si le chemin l traverse l'axe des x, la méthode même du texte permet aisément d'apercevoir les modifications qu'il faut apporter aux conclusions qui vont suivre.

lentement que α. Posons, par exemple,

$$h = +\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\log n}}$$

(h étant positif, le chemin l est situé au-dessus de Ox) [1]. Quand n croît indéfiniment, l'étoile A^l (bien déterminée pour chaque valeur de n) tend vers l'étoile A, et le domaine d^z tend à se réduire au vecteur $\overline{Oz}$. D'autre part, pour chaque valeur de n, S_n est un polynome en z bien déterminé, de degré n, qui, lorsque n croît indéfiniment, tend vers $f(z)$ pour tout point z de A : car dès que n dépasse une certaine limite, d^z différant très peu du vecteur $\overline{Oz}$, $f(z)$ est holomorphe dans d^z et y garde un module inférieur à une quantité fixe H. Au lieu d'un seul point z, considérons une aire B intérieure à A, et une aire B' comprenant B à son intérieur, mais intérieure à A : dès que n dépasse une certaine limite q, l'aire d^z fait partie de B', quel que soit z dans B, et l'on a

$$(31) \qquad |f(z) - S_n(z)| < \frac{2H_0\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}} \quad \text{pour} \quad n > q,$$

en tout point z de B, [H_0 maximum de $f(z)$ dans B'].

D'après cela, la série

$$(M_2) \quad S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \ldots = a_0 + p_1(z) + p_2(z) + \ldots$$

est une série (M) qui converge absolument dans A et uniformément dans toute aire intérieure à A. Le terme p_n est un polynome en z de degré n.

27. Examinons maintenant ce qui se passe sur les demi-droites frontières de A. Soit D une demi-droite exceptionnelle, issue du point singulier ζ : *si ce point est algébrique,* je vais montrer que *la série* (M_2) *converge absolument sur* D *au delà du point* ζ *et représente* $f_d(z)$, *tant qu'on ne rencontre pas sur* D *un point singulier transcendant de* $f_d(z)$. Elle converge même *uniformément* vers $f_d(z)$ et est dérivable terme à terme indéfiniment

[1] Si, au lieu de prendre $h = +\sqrt{\alpha}$, on prenait $h = -\sqrt{\alpha}$, la courbe l (correspondant à chaque valeur de n) serait située au-dessous de Ox, et il faudrait, dans tout ce qui suit, remplacer $f_d(z)$ par $f_g(z)$, valeur de $f(z)$ *à gauche* de D.

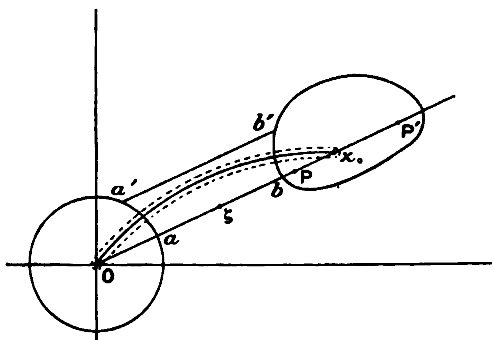
sur tout segment PP′ de D le long duquel $f_d(z)$ est holomorphe (extrémités comprises) [pourvu qu'entre ζ et P la fonction $f_d(z)$ ne présente que des points singuliers algébriques].

En particulier, si ζ est un *pôle* et si D ne renferme pas d'autre point singulier, la série M_2 converge vers $f(z)$ sur toute la droite D (le point ζ excepté) et converge uniformément sur tout segment fini PP′ de D (dont ζ ne fait pas partie).

Pour démontrer ce théorème, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où entre ζ et P il n'existe pas de point singulier de $f_d(z)$.

De O comme centre décrivons un cercle plus petit que le cercle d'holomorphie de $f(z)$; entourons PP′ d'une aire assez aplatie pour que $f_d(z)$ y soit prolongeable régulièrement (contour compris); enfin relions ces deux aires par une bande $aba'b'$

Fig. 8.



attenante au bord *droit* de OP et assez étroite pour faire partie de l'étoile A. Si, dans l'aire totale E ainsi formée, on prolonge la fonction $f(z)$, cette branche de fonction, qui coïncide le long de OP′ avec $f_d(z)$ et que je représenterai par $f_d(z)$, est holomorphe dans E, contour compris, le point ζ excepté. En ce point, qui est un point algébrique, $f_d(z)$ peut devenir infini d'un certain ordre m (entier ou fractionnaire) : dans l'aire E, $|f_d(z)|$ reste inférieur à $\frac{K}{|z-\zeta|^m}$, K désignant une certaine constante et m une quantité positive ou nulle.

D'autre part, soit z_0 un point du segment PP′. Pour les petites valeurs de h, donc pour les grandes valeurs de n, le chemin l^{z_0} dif-

fère très peu du vecteur $\overline{Oz_0}$ et fait partie de l'aire E; la distance minima δ entre un point de l^{z_0} et un point du contour de E tend vers zéro avec h, et est de l'ordre de h pour h infiniment petit; on peut écrire $\delta = \mu h$, μ désignant une quantité positive qui dépend de h et de z_0, et qui reste supérieure ([1]) à un nombre fixe $\lambda > 0$ quels que soient z_0 entre P et P′ et h entre o et 1. L'aire d^{z_0} est, par suite, intérieure à E, dès que n dépasse une certaine limite (indépendante de la position de z entre P et P′) : en effet, les cercles décrits d'un point de l^{z_0} comme centre, avec $14\alpha|z_0|$ comme rayon, sont intérieurs à E dès que $14\alpha\overline{OP'}$ est moindre que λh, c'est-à-dire dès que n dépasse un certain entier, puisque h est infiniment grand par rapport à α pour $n = \infty$. Soit q une valeur de n telle qu'on ait

$$14\alpha\rho < \frac{\lambda}{2} h \qquad (\rho = OP'),$$

c'est-à-dire

$$14\alpha\rho < \frac{\lambda}{2}\sqrt{\alpha}, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\alpha} < \frac{\lambda}{28\rho}, \qquad \text{ou enfin} \qquad \log q > 2\left(\frac{28\rho}{\lambda}\right)^2.$$

Pour $n > q$, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire d^{z_0}; son module y est moindre que $\frac{K}{|z-\zeta|^m}$, c'est-à-dire moindre que $\frac{K}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m h^m}$, puisque z, variant dans d^{z_0}, reste à une distance de ζ supérieure à $\lambda h - 14\alpha\rho > \frac{\lambda}{2} h$.

L'inégalité (31) s'applique donc au point z_0 et donne ici

(32) $$|f_d(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{2K}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m} \times \frac{\sqrt{n}}{|h|^m e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}.$$

Or $h = \sqrt{\frac{2}{\log n}}$, et $\frac{1}{h^m}$ est inférieure à $\sqrt{n}$ pour n suffisamment grand. On a donc, tout le long de PP′,

$$|f_d(z) - S_n(z)| < K \frac{n}{e^{\frac{\sqrt{n}}{2}}} \qquad (\text{K constante numérique}),$$

dès que n dépasse un certain entier.

([1]) Il serait facile de donner une valeur explicite de λ, mais la chose est inutile au raisonnement.

La série (M_2) *converge donc absolument et uniformément le long de* PP′ *vers* $f_d(z)$. C. Q. F. D.

28. De plus, pour chaque valeur de n, décrivons du point z_0 comme centre un cercle c de rayon $\mu\alpha$ (μ constante numérique). Quand z reste intérieur à c, le chemin l^z reste intérieur au domaine E (au moins dès que n est suffisamment grand) et la distance minima de ζ à l'arc l^z est encore de l'ordre h et supérieure à λh (en modifiant un peu, s'il est nécessaire, la constante λ introduite plus haut). L'inégalité (32) se trouve donc démontrée non seulement pour $z = z_0$, mais dans tout le cercle c, d'où l'on déduit, en vertu d'un théorème classique ([1]) :

$$|f_d^{(j)}(z_0) - S_n^{(j)}(z_0)| < \frac{j!}{(\mu\alpha)^j} \frac{2K}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m} \times \frac{\sqrt{n}}{h^m e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}} < K' \frac{(\log n)^{j+\frac{m}{2}}\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}} < \frac{K'n}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}}$$

en tout point z_0 de PP′, dès que n dépasse un certain entier.

Les séries obtenues en dérivant terme à terme la série (M_2) convergent donc, elles aussi, sur PP′ absolument et uniformément; elles représentent sur PP′ les dérivées successives de $f_d(z)$.

Si, entre l'origine et le point P, il existe plusieurs points singuliers (*tous algébriques*) de $f_d(z)$, rien n'est changé dans le raisonnement précédent : il suffit de considérer l'ordre maximum m d'infinitude de $f_d(z)$ en ces points singuliers; dans l'aire d^{z_0}, $|f_d(z)|$ est moindre que $\dfrac{K}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m h^m}$ (quel que soit z_0 entre P et P′), et les inégalités précédentes subsistent.

D'une façon générale, pour que le raisonnement subsiste, *il suffit : 1° que* $f(z)$ *soit holomorphe jusqu'en un point* Q *à droite* ([2]) *de* D, *et 2° qu'en tout point singulier* ξ *de* $f_d(z)$ *sur* D, *on ait*

(33) $$|f_d(z)| < e^{\frac{1}{|z-\xi|^m}} \quad (m \text{ constante numérique} > 0),$$

pour z *voisin de* ξ *à droite de* D.

([1]) A savoir ce théorème : *Si* $F(z)$ *est holomorphe et de module moindre que* H *dans un cercle de rayon* ρ *et de centre* z_0, $|F^{(j)}(z_0)|$ *est moindre que* $H\frac{j!}{r^j}$.

([2]) *Voir* le n° 24.

Soit alors PP′ un segment de D compris entre O et Q et le long duquel $f_d(z)$ est holomorphe. Quel que soit z_0 entre P et P′, la fonction $f_d(z)$ (dès que n dépasse une certaine limite) est holomorphe et de module moindre que $e^{\left(\frac{2}{\lambda h}\right)^m}$ dans l'aire d^{z_0} qui correspond à chaque valeur de n. Or la quantité

$$\left(\frac{2}{\lambda h}\right)^m = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^m \left(\frac{\log n}{2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

est moindre que $n^{\frac{1}{4}}$, dès que n dépasse un certain entier q, en sorte qu'on a

$$|f(z_0) - S_n(z_0)| < 2e^{n^{\frac{1}{4}}} \times \frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}},$$

pour $n > q$, le long du segment PP′. Cette inégalité entraîne les mêmes conséquences que ci-dessus.

Remarquons que, sur D, les points singuliers de $f_d(z)$ peuvent former des ensembles quelconques, et même comprendre tous les points d'un segment : la seule condition qui leur soit imposée est l'inégalité (33).

En définitive, *si la fonction* $f(z)$ *est holomorphe à droite de* D *jusqu'en un certain point* Q, *et si, en chaque point singulier* ξ *de* $f_d(z)$ *sur* D, *l'inégalité* (33) *est vérifiée, la série* (M_2) *converge absolument et uniformément vers* $f_d(z)$ *sur tout segment* PP′ *de* OQ *le long duquel* $f_d(z)$ *est holomorphe; les séries dérivées terme à terme convergent de la même manière sur* PP′ *vers les dérivées successives de* $f_d(z)$.

29. Par exemple, appliquée à la fonction $e^{\frac{1}{z-1}}$, la série (M_2) converge absolument dans tout le plan, sauf pour $z = 1$; elle converge uniformément dans toute aire qui n'a aucun point commun avec la demi-droite $x > 1$, $y = 0$. Elle converge uniformément vers $e^{\frac{1}{x-1}}$ sur tout segment fini $x_1 x_2$ de cette demi-droite ($1 < x_1 < x_2$).

Il est impossible que cette dernière série converge uniformément sur une courbe traversant la demi-droite exceptionnelle : autrement, on formerait aisément une courbe fermée C entourant le point $z = 1$ et sur laquelle la série (M_2) convergerait unifor-

mément. Les termes de cette série (polynomes en z) étant holomorphes dans C et sur C, la série (d'après un théorème classique) convergerait uniformément dans C, et sa somme serait holomorphe dans C, en particulier pour $z = 1$, ce qui est absurde. La remarque s'étend évidemment au développement d'une fonction quelconque par la série (M_2).

Admettons enfin que, $f(z)$ étant toujours holomorphe à droite de OQ, l'inégalité (33) ne soit pas vérifiée, mais qu'on connaisse une limite *quelconque* du mode de croissance de $f_d(z)$ dans le voisinage de chacun des points singuliers ξ situés sur D (entre O et Q); soit

$$|f_d(z)| < \varphi\left(\frac{1}{|z-\xi|}\right).$$

On peut toujours former une série analogue à (M_2) et qui représente $f_d(z)$ sur OQ (en dehors des points singuliers) : il suffit, dans les raisonnements précédents, de faire décroître h *plus lentement encore* avec $\frac{1}{n}$, et de prendre $h = \frac{1}{\psi(n)}$ tel que (la constante g étant arbitraire, mais positive) l'on ait

$$\varphi[g\psi(n)] \times \frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{\sqrt{n}}{4}}} < \frac{1}{n^2}$$

dès que n dépasse une certaine limite (qui dépend de g) (¹).

Par exemple, si l'on sait qu'on a

$$|f_d(z)| < e^{e^{\frac{1}{|z-\xi|^m}}} \qquad (m \text{ const.} > 0),$$

dans le voisinage de chaque point ξ, il suffit, comme on le voit aisément, de prendre $h = \log\alpha = \frac{1}{\log\log n - \log 2}$.

Enfin, tous les résultats obtenus s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions de plusieurs variables.

(¹) L'existence de séries (M) qui convergent sur les demi-droites frontières *au delà des pôles* a été démontrée pour la première fois, à l'aide de considérations toutes différentes, par M. Helge von Koch. M. Mittag-Leffler a récemment indiqué d'autres séries (M) convergentes au delà des points singuliers isolés de $f(z)$ qui ne sont pas des points de branchement (points essentiels de Weierstrass), et cela quel que soit le mode de croissance de $f(z)$ aux alentours du point.

30. *Quelques applications des résultats précédents.* — Ne considérons plus, dans ce qui suit, que des fonctions $f(z)$ dont les points singuliers à distance finie sont tous algébriques. La série (M_2) correspondante convergera dans tout le plan, sauf aux points singuliers, sommets de l'étoile, et représentera $f_d(z)$ sur les demi-droites D.

Appliquons cette remarque aux équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, et soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ les points singuliers de l'intégrale. Si l'on pose $Z = \frac{1}{(z-\zeta_1)\ldots(z-\zeta_k)}$, l'intégrale devient [1] une fonction $f(Z)$ dont le seul point singulier non algébrique est à l'infini, et qui n'a qu'un nombre fini de points critiques algébriques : le développement de $f(z)$ en série (M_2) converge donc dans tout le plan sauf aux points singuliers.

Quand, à la série (M_2), on substitue la série *conjuguée* (M_3), qui s'en déduit en changeant partout h en $-h$, la nouvelle série jouit exactement des mêmes propriétés que (M_2) à cela près que $f_d(z)$ est remplacé partout par $f_g(z)$, valeur de f à gauche de D.

Ajoutons ensemble maintenant, terme à terme, les deux séries (M_2) et (M_3), multipliées respectivement par $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$; on forme ainsi une série (M), qui représente $f(z)$ dans l'étoile A, et qui, sur les demi-droites frontières, représente $\frac{af_d+bf_g}{a+b}$.

En particulier, si l'on prend $a=b$, *on obtient une série de la forme*

$$a_0 + (n)\sum(\lambda_{1,n}a_1 z + \lambda_{2,n}a_2 z^2 + \ldots + \lambda_{n,n}a_n z^n),$$

où les coefficients λ *sont réels, qui représente* $f(z)$ *dans l'étoile et la moyenne arithmétique de* f_d *et* f_g *sur les demi-droites* D. Appliquée à $\sqrt{1-z}$, cette série représente $\sqrt{1-x}$ pour x réel et <1 et représente zéro pour x réel et >1.

Si l'on retranche terme à terme les deux séries (M_2) et (M_3), on obtient (après division par i) une série de forme entièrement analogue à la précédente, qui représente zéro dans tout le plan, quel que soit $f(z)$, sauf sur les demi-droites D où elle représente $f_d - f_g$.

---

[1] On peut éviter cette transformation en discutant le mode de croissance de l'intégrale dans le voisinage de chaque point singulier ζ.

31. Parmi les séries (M) de la forme $\frac{a(M_2)+b(M_3)}{a+b}$, la série $\frac{(M_2)+i(M_3)}{1+i}$, que je désignerai par (M_4), est la plus remarquable. Appliquons ce développement (M_4) à une fonction $f(z)$ qui n'a, sur l'axe réel, d'autre point singulier que le point $z=1$, point algébrique autour duquel deux branches seulement se permutent. La série (M_4) jouit alors des propriétés suivantes :

1° *Elle converge absolument et uniformément, ainsi que les séries dérivées, sur tout segment de l'axe réel qui ne comprend pas le point $x=1$; elle converge vers $f(x)$ pour $x<1$ et vers $\frac{f_d(x)+if_g(x)}{1+i}$ pour $x>1$* (*voir* le n° 25).

2° *La somme* $G(x)$ *de cette série coïncide donc avec $f(x)$ pour $x<1$, et avec une fonction analytique* DISTINCTE *de $f(x)$ pour $x>1$. Mais, si l'on applique à la fonction $G(x)$ le développement (M_4) en prenant x_0 comme origine, la nouvelle série (M_4) jouit des mêmes propriétés et représente la même fonction $G(x)$ que la première sur tout l'axe réel* ([1]).

Par exemple, appliquée à $F(z)=\sqrt{1-z}$, $[F(0)=+1]$, la série (M_4) représente $+\sqrt{1-x}$ pour $x<1$, et $-\sqrt{x-1}$ pour $x>1$.

32. Considérons enfin une fonction harmonique $V(x, y, z)$, uniforme et régulière dans tout l'espace sauf en certains points où elle devient infinie algébriquement (ou moins rapidement qu'une fonction algébrique). La série (M_2), étendue à trois variables, converge absolument vers $V(x, y, z)$, dans tout l'espace réel, sauf aux points singuliers; elle converge uniformément dans tout domaine intérieur à l'étoile; elle est dérivable terme à terme indéfiniment (sauf aux points singuliers) et les séries dérivées ont les mêmes propriétés que la série elle-même.

([1]) On peut même former des exemples où la série (M_4) jouit de toutes les propriétés énoncées, et de plus converge absolument et uniformément, ainsi que les séries dérivées, sur tout segment de l'axe réel (le point $x=1$ compris); la fonction réelle $G(x)$ a donc des dérivées de tout ordre quel que soit x, mais, pour $x=1$, cette fonction et toutes ses dérivées sont nulles, et la série (M_4) d'origine $x=1$ est identiquement nulle.

NOTE II.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. BAIRE.

PAR M. HENRI LEBESGUE.

On appelle *fonctions de classe* 1 celles qui peuvent être considérées comme les limites de suites convergentes de fonctions continues.

Nous dirons qu'une fonction f est, à moins de ε près, de classe 1 dans un intervalle I [1] si l'on peut trouver une fonction φ de classe 1 telle que, pour tous les points de I, on ait

$$|f-\varphi|<\varepsilon.$$

Nous dirons qu'une fonction f est, à moins de ε près, de classe 1 en un point P s'il existe un intervalle, contenant au sens étroit le point P, dans lequel f est, à moins de ε près, de classe 1.

Nous dirons qu'une fonction f est de classe 1 en un point P si, quel que soit ε positif, f est de classe 1, à moins de ε près, en P.

Supposons que l'on convienne de s'occuper seulement des valeurs de $f-\varphi$ pour les points d'un ensemble parfait E. Alors les définitions précédentes nous font connaître les conditions dans lesquelles on dira qu'une fonction est de classe 1, à moins de ε près, sur E ou qu'elle est de classe 1 sur E en un point de E.

Remarquons encore que si la fonction φ de comparaison avait été supposée continue dans un intervalle, au lieu d'être supposée de classe 1 dans un intervalle, nous aurions eu une définition de la continuité en un point déduite d'une définition de la continuité

[1] Toutes les définitions et tous les raisonnements qui suivent concernent les fonctions d'une seule variable; il suffirait de très légers changements pour les rendre applicables au cas général.

dans un intervalle (¹) supposée antérieurement donnée. D'ailleurs les raisonnements qu'on va lire sont exactement calqués sur une suite de raisonnements permettant de fonder la théorie des fonctions continues sur la définition de la continuité dans un intervalle, et non pas, comme on le fait le plus souvent, sur la continuité en un point.

I. *Toute suite uniformément convergente de fonctions de classe 1 a pour limite une fonction de classe 1* (²).

Soit $f_1, f_2, \ldots$ une suite uniformément convergente de fonctions de classe 1, f sa limite. Soit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ une série convergente de nombres positifs décroissants. On peut toujours trouver n_p tel que, quel que soit q positif, on ait

$$|f_{n_p} - f_{n_p+q}| \leqq \varepsilon_p;$$

je suppose de plus que les n_p croissent avec p. La série

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) \ldots$$

est convergente et de somme f; ses termes sont de classe 1, car la différence de deux fonctions de classe 1 est une fonction de classe 1.

Le $p^{\text{ième}}$ terme $(p \geqq 0)$ est la limite, pour r infini, de la suite de fonctions continues f_p^r. Je dis que, pour $p > 0$, on peut supposer que, quel que soit r, on ait $|f_p^r| \leqq \varepsilon_p$. En effet, si les f_p^r ne satisfont pas à cette inégalité, posons

$$\begin{array}{lll} F_p^r = f_p^r, & \text{quand on a} & -\varepsilon_p \leqq f_p^r \leqq \varepsilon_p; \\ F_p^r = -\varepsilon_p, & \text{quand on a} & f_p^r \leqq -\varepsilon_p; \\ F_p^r = +\varepsilon_p, & \text{quand on a} & \varepsilon_p \leqq f_p^r. \end{array}$$

Les F_p^r ont même limite que les f_p^r, car la limite de ceux-ci ne

(¹) Celle de la page 27 ou toute autre équivalente, celle-ci par exemple : une fonction est continue dans un intervalle si on peut l'y représenter par une série uniformément convergente de polynomes.

(²) D'après la définition adoptée les fonctions continues sont des fonctions de classe 1. Si, comme le fait M. Baire, on excluait de la classe 1 les fonctions continues, il faudrait, dans cet énoncé et dans les suivants, remplacer *fonction de classe* 1 par *fonction continue ou de classe* 1.

surpasse pas ε_p en valeur absolue, donc on peut remplacer les f_p^r par les F_p^r qui satisfont à toutes les conditions indiquées.

Les f_p^r étant choisies comme il vient d'être dit, posons

$$\varphi_r = f_0^r + f_1^r + f_2^r + \dots.$$

La série φ_r est absolument et uniformément convergente, ses termes sont des fonctions continues, la fonction φ_r est continue. Mais φ_r tend vers f, quand r croît, car les p premiers termes de φ_r ont une somme qui tend vers f_{n_p} et les suivants ont une somme au plus égale en valeur absolue à $\varepsilon_p + \varepsilon_{p+1} + \dots.$

Ceci démontre le théorème.

Considérons des intervalles $I_1, I_2, \dots$, en nombre fini ou dénombrable et des fonctions de classe 1 $f_1, f_2, \dots$, définies respectivement dans ces intervalles, extrémités y comprises. J'appelle f la fonction égale à f_1 dans I_1, à f_2 dans la partie de I_2 extérieure à I_1, à f_3 dans la partie de I_3 extérieure à $I_1 + I_2$, etc., je dis que f est de classe 1. Soit $f_p^1, f_p^2, \dots$, une suite de fonctions continues tendant vers f_p. Par f^r je désigne une fonction continue assujettie aux seules conditions d'être égale à f_1^r dans I_1, à f_2^r pour les points de I_2 qui sont distants de $\frac{1}{r}$ au moins de ceux de I_1, à f_3^r pour les points I_3 qui sont distants de $\frac{1}{r}$ au moins de ceux de $I_1 + I_2, \dots.$ f^r tend vers f, quand r augmente indéfiniment, donc f est de classe 1 dans $I_1 + I_2 + \dots.$

Supposons maintenant que φ soit, à moins de ε près, de classe 1, dans chacun des intervalles $I_1, I_2, \dots.$ Cela veut dire qu'on peut trouver les fonctions de classe 1 $f_1, f_2, \dots$, définies dans I_1, $I_2, \dots$, et différant de φ de moins de ε, donc φ diffère de la fonction f, formée comme il vient d'être dit, de moins de ε dans $I_1 + I_2 + \dots$, et par suite φ est, à moins de ε près, de classe 1 dans $I_1 + I_2 + \dots$

D'après le théorème de M. Borel, démontré page 9, dire qu'une fonction f est, à moins de ε près, de classe 1 en tous les points d'un intervalle I, extrémités y comprises, c'est dire que I est la somme d'un nombre fini d'intervalles dans lequel f est de classe 1, à moins de ε près. Donc :

II. *Si une fonction est, à moins de ε près, de classe* 1 *en tous*

les points d'un intervalle, elle est, à moins de ε près, de classe 1 *dans cet intervalle.*

D'ailleurs, d'après I, une fonction est de classe 1 dans un intervalle si, quel que soit ε positif, elle est de classe 1, à moins de ε près, dans cet intervalle; car elle est alors la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe 1, donc :

III. *Si une fonction est de classe* 1 *en tous les points d'un intervalle, elle est de classe* 1 *dans cet intervalle.*

Ces deux théorèmes sont encore exacts lorsqu'on ne sait rien relativement aux extrémités a et b de l'intervalle considéré.

Modifions, en effet, la fonction donnée f en lui donnant la valeur constante $f(a)$ de $-\infty$ à a et la valeur constante $f(b)$ de b à $+\infty$, elle est alors de classe 1 dans les deux intervalles $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$.

Si nous supposons qu'elle est de classe 1, à moins de ε près, en tous les points intérieurs à (a, b), cela ne sera pas changé par la modification indiquée. Du théorème de M. Borel on déduit facilement que l'ensemble des points intérieurs à (a, b) est l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'intervalles dans chacun desquels f est, à moins de ε près, de classe 1.

L'intervalle $(-\infty, +\infty)$ est donc la somme d'une infinité dénombrable d'intervalles dans chacun desquels, après la modification, f est de classe 1, à moins de ε près; dans $(-\infty, +\infty)$, après la modification, f est de classe 1, à moins de ε près; avant la modification, f était de classe 1, à moins de ε près, dans (a, b); c'est la proposition II, d'où l'on déduit la proposition III.

Des théorèmes II et III ainsi complétés, il résulte que l'ensemble des points en lesquels une fonction donnée f n'est pas de classe 1 ne contient aucun point isolé et que, de même, l'ensemble E des points où f n'est pas de classe 1, à moins de ε près, ne contient aucun point isolé. Par définition f ne peut être de classe 1, à moins de ε près, en un point P sans qu'il en soit de même pour tous les points assez voisins de P; le complémentaire de E ne peut donc contenir aucun point limite de E, c'est-à-dire que E est fermé, par suite :

IV. *L'ensemble* E *des points en lesquels une fonction donnée* f

n'est pas de classe 1, *à moins de* ε *près, est un ensemble parfait.*
Je vais maintenant démontrer la propriété suivante :

V. *La fonction* f *est discontinue sur* E *en tout point de* E ([1]).

Soient $I_1, I_2, \ldots$, les intervalles contigus à E; d'après II, f est de classe 1, à moins de ε près, dans chacun d'eux. Soit φ_p une fonction de classe 1 limite, pour r infini, de la suite convergente des fonctions continues φ_p^r et différant de f, dans I_p, de moins de ε. Si f était continue sur E, en un point M de E, la fonction φ égale à φ_p dans I_p et à $f(M)$ sur E différerait de f de moins de ε dans un certain intervalle contenant M à son intérieur. En M, f n'est pas de classe 1, à moins de ε près; il suffira donc de démontrer que φ est de classe 1 pour prouver le théorème V.

J'appelle I_p^r l'intervalle ayant même milieu que I_p et tel que

$$\text{longueur } I_p = \text{longueur } I_p^r + \frac{1}{r}.$$

J'appelle φ^r une fonction continue assujettie aux seules conditions d'être égale à f_1^r dans I_1^r, à f_2^r dans $I_2^r, \ldots$, à f_r^r dans I_r^r et à $f(M)$ à l'extérieur de $I_1 + I_2 + \ldots + I_r$. φ est la limite, pour r infini, de φ^r; le théorème est démontré.

J'arrive maintenant au théorème de M. Baire ([2]).

VI. *Pour qu'une fonction soit de classe* 1 *il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

La condition est *suffisante*. Si f n'est pas de classe 1, f n'est pas de classe 1, à moins de ε près, si ε est assez petit, d'après I. D'après II, il existe alors des points où f n'est pas de classe 1, à moins de ε près; d'après IV et V l'ensemble E de ces points est parfait et f est totalement discontinue sur E.

La condition est *nécessaire* ([3]). Soit f de classe 1, limite des fonctions continues $f_1, f_2, f_3, \ldots$. J'appelle $E_{n,p}$ l'ensemble

([1]) D'une façon plus précise, en aucun point de E, f n'est de classe 1, à moins de ε près, sur E.

([2]) *Voir* Baire, *Comptes rendus*, 21 mars 1898 et Thèse, *Annali di Matematica*, 1899; Lebesgue, *Comptes rendus*, 27 mars 1899; Baire, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900.

([3]) La démonstration qui suit diffère sensiblement de celle de M. Baire, mais la plupart des raisonnements qui y sont employés lui sont dus. Cette démonstration a été obtenue indépendamment par M. Paul Montel et par moi.

fermé des points pour lesquels on a $|f_n - f_{n+p}| \leqq \varepsilon$. E étant un ensemble parfait quelconque, donné arbitrairement, j'appelle E_n l'ensemble des points communs à la fois à E, à $E_{n,1}$, à $E_{n,2}$, ... E_n, étant l'ensemble commun à une infinité dénombrable d'ensembles fermés, est fermé. E est la somme des E_n; je dis que l'on peut prendre n assez grand pour qu'il existe un intervalle I contenant des points de E et tel que tous les points communs à I et E appartiennent à E_n [1]. Si cela n'était pas, dans tout intervalle I contenant des points de E on pourrait, quel que soit n, trouver un point de E n'appartenant pas à E_n et, puisque E_n est fermé, un intervalle contenant des points de E sans contenir de points de E_n. Or soit I_1 un intervalle contenant des points de E et pas de points de E_1, soit I_2 un intervalle, intérieur à I_1, contenant des points de E et pas de points de E_2, etc. On ne peut pas continuer ainsi indéfiniment, sans cela, à l'intérieur de I_1, I_2, ..., existerait au moins un point de E qui n'appartiendrait ni à E_1, ni à E_2, ... Par suite on peut trouver I, contenant des points de E, et n de manière que, dans I, E et E_n soient identiques. Dans I, f et f_n diffèrent de ε au plus; si I' est choisi intérieur à I, contenant des points de E, et assez petit pour que, dans I', l'oscillation de f_n soit inférieure à ε, l'oscillation de f sur E, dans I', est inférieure à 3ε.

Ceci posé, I_0 étant choisi arbitrairement, contenant des points de E, nous pourrons choisir I_p, intérieur à I_{p-1}, contenant des points de E, et tel que, dans I_p, l'oscillation de f sur E soit inférieure à $3 : p$. A l'intérieur de tous ces intervalles I_0, I_1, ..., existe au moins un point de E; en ce point f est continue sur E.

En terminant, j'indique une propriété qu'on peut parfois invoquer pour démontrer qu'une fonction est de classe 1 [2].

VII. *Pour qu'une fonction f soit de classe* 1, *il faut et il suffit que, quel que soit ε positif, l'intervalle que l'on considère soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue, à ε près.*

La condition est *nécessaire*. En effet si, dans la démonstration

---

(1) Ici, et dans la suite, il s'agit de points contenus, *au sens étroit*, dans les intervalles indiqués.

(2) Pour plus de détails *voir* une Note qui paraîtra prochainement dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*.

précédente, E est l'intervalle considéré, cet intervalle est la somme des E_n et, sur E_n, f et f_n diffèrent de ε au plus.

La condition est *suffisante*. Pour le voir directement supposons que l'intervalle considéré soit la somme des ensembles fermés E_n et que, sur E_n, f diffère de ε au plus de la fonction continue f_n. Je prends un ensemble dénombrable D_n de points partout dense sur E_n en ayant soin d'y faire figurer les extrémités des intervalles contigus à E_n [1]. Je barre ceux de ces points qui appartiennent à $E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1}$ et je range les autres en suite simplement infinie, la suite $A_n(M_n^1, M_n^2, \ldots)$; d'ailleurs, si un point M a été barré de D_n parce qu'il appartient à $E_{n'}(n' < n)$, j'ai eu soin de faire figurer M dans $D_{n'}$.

Je vais construire une fonction continue F_p. Pour cela je prends le point M_p^1, au moins les p premiers points de A_{p-1}, au moins les p premiers points de A_{p-2}, et ainsi de suite. Je prends dans chacune de ces suites assez de points pour que, si M_k^l est pris, auquel cas, faisant partie de A_k, il ne fait pas partie de E_{k-1}, les deux extrémités de l'intervalle contigu à E_{k-1} et contenant M_k^l, qui font partie de l'une des suites $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots, A_1$, soient prises aussi. La fonction continue F_p est définie par la condition d'être linéaire entre deux des points ainsi choisis et, si M_k^l a été choisi, d'être en ce point égale à $f_k(M_k^l)$.

Cherchons la limite de F_p, quand p augmente indéfiniment. Si R appartient à l'une des suites A, il est évident que $F_p(R)$ tend vers $f_{n_0}(R)$, n_0 étant le plus petit indice correspondant à un ensemble E_n contenant R. Il en est encore de même si R n'appartient à aucune suite A; car, dès que p est assez grand, les deux points servant à la définition de F_p et contenant entre eux R sont deux points S, T de A_{n_0}. $F_p(R)$ est dès lors comprise entre $f_{n_0}(S)$ et $f_{n_0}(T)$, quantités qui tendent, quand p augmente, vers $f_{n_0}(R)$ car f_{n_0} est continue et S et T tendent vers R.

La suite des F_p est convergente, sa limite F diffère de la fonction f de ε au plus, donc f est, à ε près, de classe 1. Puisque ε est quelconque, il résulte de I que f est de classe 1.

---

[1] A cause du rôle joué par les intervalles contigus, cette démonstration ne s'applique pas immédiatement au cas de plusieurs variables.

NOTE III.

SUR L'EXISTENCE DES FONCTIONS DE CLASSE QUELCONQUE.

PAR M. ÉMILE BOREL.

On peut se demander si la classification de M. Baire n'est pas purement idéale, c'est-à-dire *s'il existe* effectivement des fonctions dans les diverses classes définies par M. Baire. Il est clair, en effet, que si l'on prouvait, par exemple, que toutes les fonctions sont de classe 0, 1, 2 ou 3, la plus grande partie de la classification de M. Baire serait sans intérêt. Nous allons voir qu'il n'en est rien; mais il est tout d'abord nécessaire d'insister un peu sur ce que l'on doit appeler une fonction *définie* (1). Il est, en effet, aisé de voir qu'il *existe* des fonctions de classe supérieure à un nombre quelconque (fini ou transfini) donné d'avance; car l'ensemble E des fonctions dont la classe ne dépasse pas un nombre donné a évidemment la puissance du continu; et l'ensemble F de toutes les fonctions possibles a une puissance supérieure à celle du continu (2); l'ensemble F est donc infiniment plus riche que l'ensemble E, c'est-à-dire renferme une infinité de fonctions qui n'appartiennent pas à E. Mais ce raisonnement basé sur les puissances a un grave défaut : il nous apprend bien qu'il y a des fonctions de F qui n'appartiennent pas à E, mais il ne nous donne pas le moyen *d'en définir une,* c'est-à-dire d'en désigner *une* de telle manière qu'on puisse la distinguer des autres; en d'autres termes de manière que deux personnes différentes, lorsqu'elles parlent de cette fonction, soient certaines qu'elles parlent de *la même*.

Le raisonnement précédent ne permet pas d'exclure l'hypothèse où un théorème tel que le suivant serait exact : *toute fonction*

(1) *Voir* mes *Leçons sur la théorie des fonctions,* Notes II et III.
(2) *Loc. cit.*

effectivement définie est nécessairement de classe 0, 1, 2 *ou* 3. Nous allons, au contraire, montrer qu'il est possible de *définir* effectivement une fonction dont la classe dépasse un nombre donné d'avance.

D'ailleurs, cette définition exigera en général des opérations transcendantes pratiquement inexécutables; on sait que cette difficulté se présente presque toujours lorsqu'il intervient des processus infinis : séries ou intégrales

Voici comment on peut définir *une* fonction de classe supérieure à *deux;* le même raisonnement s'appliquerait à une classe quelconque. Posons

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha+\beta} c_{\alpha,\beta,\gamma} x^{\gamma}.$$

Toute série double de polynomes peut être écrite sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[\sum_{\beta=1}^{\infty} P_{\alpha,\beta}(x) \right].$$

Si dans un certain intervalle la série (1) converge, elle définit, dans cet intervalle, une fonction de classe 0, 1, ou 2; et toute fonction de classe 0, 1 ou 2 peut être définie de cette manière par un choix convenable des $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ (chaque fonction est même définie d'une infinité de manières, mais cela n'a pas d'inconvénient pour ce qui suit).

On peut, au Tableau des constantes $c_{\alpha,\beta,\gamma}$, faire correspondre d'une manière univoque un nombre u_n compris entre 0 et 1 ; c'est-à-dire s'arranger de manière qu'à *tout* nombre u_n corresponde un système de constantes $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ et à *tout* système de constantes un nombre u_n, deux nombres distincts correspondant à deux systèmes distincts, et réciproquement. Une telle correspondance peut être réalisée d'une infinité de manières différentes; mais, parmi cette infinité de manières, nous pouvons en choisir une *bien déterminée* (1). Ceci fait, nous allons définir une fonction $f(x)$, dans l'intervalle 0 — 1, de la manière suivante : soit u_n une valeur quelconque de x comprise entre 0 et 1 ; formons la série (1) qui

(1) Voir mes *Leçons sur la théorie des fonctions,* Chap. I.

correspond à u_n d'après la correspondance précédemment réalisée; si pour $x = u_n$ la série (1) ainsi formée diverge, ou si elle converge et a une somme différente de zéro, nous poserons

$$f(u_n) = 0;$$

si pour $x = u_n$ la série (1) correspondant à x converge et a pour somme zéro, nous prendrons

$$f(u_n) = 1.$$

Il est clair que la fonction $f(x)$ que nous avons ainsi définie dans l'intervalle 0 — 1 n'y coïncide avec aucune fonction de classe 0, 1, 2. Car une telle fonction, définie dans l'intervalle 0 — 1, est représentable par une série (1) convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1. Supposons, pour un instant, que la fonction $f(x)$ puisse être représentée par une telle série et soit u_n le nombre qui correspond au système des coefficients $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ de cette série; pour $x = u_n$ la série converge, puisque u_n est compris entre 0 et 1; or, si la somme de la série est différente de zéro, on a $f(u_n) = 0$ et, si la somme de la série est égale à zéro, on a $f(u_n) = 1$. Il y a donc contradiction et nous avons établi le résultat que nous avions en vue : il est possible de définir effectivement une fonction déterminée dont la classe, dans la classification de M. Baire, soit supérieure à un nombre quelconque donné d'avance (1).

(1) La démonstration précédente prouve simplement que la classe de la fonction définie est supérieure à 2, mais n'exclut pas la possibilité que cette classe soit un nombre transfini (ou même, à la rigueur, que la fonction définie soit au delà de toute classification, bien que ce ne soit guère vraisemblable). M. Lebesgue, à qui j'ai communiqué cette démonstration, a pu, en la modifiant et la complétant, en déduire la définition d'une fonction déterminée de classe 3; sa démonstration paraîtra prochainement dans le Journal de M. Jordan.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

34725 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

4,50

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction de ÉMILE BOREL.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par ÉMILE BOREL, 1898............ 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL; 1900.. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par ÉMILE BOREL; 1901.. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Robert d'Adhémar*; 1902. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Ludovic Zoretti*; 1903.. 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE, 1904........ 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole Normale supérieure par ÉMILE BOREL et rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE; 1905............................ 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy*; 1905........... 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF.................................... (*Sous presse.*)

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par PIERRE COUSIN............ (*En préparation.*)

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par ÉMILE BOREL.. (*En préparation.*)

Leçons sur les Correspondances entre variables réelles, par JULES DRACH.. (*En préparation.*)

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par OTTO BLUMENTHAL...................................... (*En préparation.*)

Leçons sur les séries trigonométriques, par HENRI LEBESGUE. (*En pr.*)

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur de l'Ecole Polytechnique. **Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques.* Avec 111 figures; 1903.................. 16 fr.

TOME II : *Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Equations différentielles.* Avec 91 figures; 1904. 16 fr.

34725 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

